Polynômes

1 Rappels

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1.1 Définition d'un polynôme

On appelle **polynôme à une indéterminée X et à coefficients dans $\mathbb{K}$**,
ou plus simplement **polynôme**, une expression de la forme :

$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \ldots + a_k X^k + \ldots + a_n X^n$

ou $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k . X^k$ avec n un nombre entier naturel (n > 0)

a_k sont appelés les **coefficients** du polynôme. k est un entier naturel **$k \geq 0$**

$a_n X^n$: est alors appelé le monôme **dominant** et a_n est le coefficient **dominant**.

Si $a_n = 1$, le polynôme est **unitaire ou normalisé**.

Par convention $X^0 = 1$

On note **$\mathbb{K}$[X]** l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs **coefficients sont égaux**.

On appelle **polynôme nul,** le polynôme dont tous les coefficients sont **nuls**.
On le note simplement P = 0 ou P (X) = 0

<u>Exemple</u> : $P(x) = 4x^2 + x - 3 + \frac{1}{x}$

$Q(x) = -6x^3 + 3x^2 - \sqrt{x} + 2$

P(x) n'est pas un polynôme car le terme $\frac{1}{x}$ correspond à une puissance négative pour x.

Q(x) n'est pas un polynôme car le terme $\sqrt{x}$ correspond à une puissance non entière (1/2) pour x.

⚠ $\frac{1}{P(X)}$ **n'est pas un polynôme.**

1.2 Définition du degré

On appelle **degré** du polynôme $P(X) = \sum a_k . X^k \neq 0$,
le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$

on note deg (P) = k ou d° P = k

Le degré d'un polynôme constant non nul **est 0.**

Le polynôme nul **n'a pas de degré** mais par convention $\boxed{\deg(0) = -\infty}$

L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n et du polynôme nul, est noté $\mathbb{K}_n[X]$

1.3 Exemples

a) $P(x) = 5x^4 - x^2 + x$ avec $\deg(P(x)) = 4$
b) $P(x) = -2{,}3$ avec $\deg(P(x)) = 0$
c) $P(x) = 0$ avec $\deg(P(x)) = -\infty$
d) $P(x) = -3x^2 + 7x^3 + 10$ avec $\deg(P(x)) = 3$ et coefficient dominant : 7
e) $P(x) = 4(1-x^2)^3$ avec $\deg(P(x)) = 6$ et coefficient dominant : - 4

f) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par : $P(X) = (1+X)^n - X^n$

Quel est le degré de P ?
Donner son coefficient dominant.

2 Opérations sur les polynômes

On définit les opérations suivantes pour les polynômes :

Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k.X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_k X^k + \ldots + a_n X^n$

et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k.X^k = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \ldots + b_k X^k + \ldots + b_m X^m$

deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.

2.1 Somme de deux polynômes

$$P(X) + Q(X) = \sum_{k=0}^{Max(n,m)} (a_k + b_k).X^k$$

Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$

$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$

<u>Exemples</u> : $P(x) = x^2 + 3$ et $Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$
calculer $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$ et $\deg(P+Q)$

$P(x) = x^4 + 2x + 1$ et $Q(x) = -x^4 + 3x^3$ calculer $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$
et $\deg(P+Q)$

2.2 Multiplication par un scalaire

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k.X^k$ un polynôme de degré n appartenant à $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :

λ . P (X) = $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda.a_k).X^k$

deg (λ . P) = deg (P) si $\lambda \neq 0$

Exemple : P(x) = x² +3 et λ = $\sqrt{2}$ calculer λ.P(x) =
et deg (λ.P(x)) =

2.3 Produit de deux polynômes

Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}$[X], de degré respectifs n et m

P(X).Q(X) = $a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + \ldots + (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0)X^k + \ldots$

$$P(X).Q(X) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i.b_{k-i}\right).X^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k.X^k$$

avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i.b_{k-i} = a_0.b_k + a_1.b_{k-1} + a_2.b_{k-2} + \ldots + a_{k-1}.b_1 + a_k.b_0$

deg (P x Q) = deg (P) + deg (Q) si P x Q $\neq 0$

P x Q = 0 ⇔ P = 0 ou Q = 0

Exemple : P(x) =x² +3 et Q(x) = 4x³ + x calculer P(x).Q(x)
et deg (P.Q)

3 Division euclidienne ou division de polynômes, suivant les puissances décroissantes

3.1 Définition

Soient 2 polynômes A et B ∈ $\mathbb{K}$[X], avec B ≠ 0, il existe un unique polynôme Q
et un unique polynôme R tels que :

A = B . Q + R avec deg (R) < deg (B)

Q : est appelé le **quotient** de la division euclidienne de A par B
R : est appelé le **reste** de la division euclidienne de A par B
A : est appelé le **dividende** de la division euclidienne de A par B
B : est appelé le **diviseur** de la division euclidienne de A par B

Cas particuliers :

- si R = 0 alors A = B . Q et A est **divisible** par B ; on dit aussi que B **divise** A
- si A = 0 alors A = B x 0 + 0
- si deg (A) < deg (B) alors A = B x 0 + A,
- si A divise B et B divise A alors A et B sont **équivalents** et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ / B (X) =λ . A (X)

3.2 Propriétés

Unicité : Les polynômes Q et R sont uniques

Existence : Quelque soient les polynômes A et B avec B$\neq$0, il existe toujours deux polynômes Q et R tels que :
A = B.Q + R

3.3 Exemple

Division euclidienne de $X^5 - 7X^3 + X - 6$ par $X^3 + X^2 - X - 1$ (selon les puissances décroissantes)

$X^5 \quad - 7X^3 \quad + X \quad - 6$	$X^3 + X^2 - X - 1$
$\underline{- (X^5 + X^4 - X^3 - X^2)}$	$X^2 - X - 5$
$- X^4 - 6X^3 + X^2 + X - 6$	
$\underline{- (- X^4 - X^3 + X^2 + X)}$	
$- 5X^3 \quad - 6$	
$\underline{- (- 5X^3 - 5X^3 + 5X + 5)}$	
$5X^2 - 5X - 11$	

On trouve : $X^5 - 7X^3 + X - 6 = (X^3 + X^2 - X - 1).(X^2 - X - 5) + (5X^2 - 5X - 11)$

4 Polynômes irréductibles

Soit P un polynôme, P $\in \mathbb{K}[X]$

- Tous les polynômes P de degré $\leqslant$ 1 sont **irréductibles dans** $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$
- Pour polynômes de degré 2, de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$
  - si $\Delta < 0$, les polynômes sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (mais pas dans $\mathbb{C}[X]$).
  - si $\Delta \geqslant 0$, les polynômes ne sont pas irréductibles.
- Tous les polynômes P de degré > 2 ne sont pas **irréductibles.**

Si un polynôme n'est pas irréductible, il est réductible
et il peut s'écrire sous la forme de produits de polynômes irréductibles.

Exemple : Soit $P = X^2 + 1$, P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$.

$P = X^3 + X^2 - X - 1 = (X - 1).(X + 1)^2$

5 Polynômes dérivés, racines

5.1 Polynômes dérivés

Soit $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k.X^k \in \mathbb{K}_n[X]$. On appelle polynôme dérivé de P

et on note P'(X) , le polynôme $P'(X)=\sum_{k=1}^{n} k.a_k.X^{k-1}$

et deg (P') = deg (P) -1 si deg (P) > 0 et si deg (P) = 0 alors P ' = 0

Remarque : pour i $\in \mathbb{N}$, $P^{(i)}$ (X) est la ième dérivée successive de P (X)

$$P^{(i)}(X)=\sum_{k=i}^{n} k.(k-1)...(k-i+1).a_k.X^{k-i}=\sum_{k=i}^{n}\frac{k!}{(k-i)!}a_k.X^{k-i}$$

Par convention $P^{(0)} = P$

Propriétés :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall$P $\in \mathbb{K}$[X], le polynôme dérivé de λ . P (X) est λ . P ' (X)
- $\forall$P, Q $\in \mathbb{K}$[X], le polynôme dérivé de P + Q est P ' + Q '
- $\forall$P, Q $\in \mathbb{K}$[X], le polynôme dérivé de P . Q est P '.Q + P.Q '

5.2 Racines

5.2.1 Définition d'une racine simple

Soient P $\in \mathbb{K}$[X], et $\alpha \in \mathbb{K}$,

α est racine de P ssi

- P (α) = 0
- **(X - α)** divise P
- P(X) = (X – α) . Q(X) avec Q(α) $\neq$ 0

Démonstration : soit α une racine de P, alors grâce à la division euclidienne, on a
P (X) = (X – α). Q (X) + R (X) avec deg (R) < 1 c'est à dire R (X) est une constante.
Mais P (α) = 0 = R (α) donc R (X) = 0.

Exemple :Soit P(x) = 2x² – x – 1 :

1 est racine évidente de P donc P se factorise sous la forme
P(x) = (x – 1)(ax + b) Déterminons a et b.

5.2.2 Définition d'une racine d'ordre k ou racine multiple

Soient P $\in \mathbb{K}[X]$, et $\alpha \in \mathbb{K}$,

α est racine d'ordre k de P ssi

- $(X - \alpha)^k$ divise P
- $P(X) = (X - \alpha)^k . Q(X)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$
- $P(\alpha) = P'(\alpha) = P^{(2)}(\alpha) = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$
  et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$

Remarque : Si deg (P) = n, l'ordre d'une racine de P est inférieur ou égal à n.

6 Factorisation dans $\mathbb{C}$ [X]

6.1 Théorème de d'Alembert

Tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 de $\mathbb{C}$ [X]
admet **au moins une racine dans** $\mathbb{C}$.

6.2 Définition d'un polynôme scindé

Tout polynôme de $\mathbb{C}$ [X] est **scindé** : si P $\in \mathbb{C}$ [X], alors deg (P) = n et

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$$
$$P(X) = a_n.(X - \alpha_1)^{h_1}.(X - \alpha_2)^{h_2}...(X - \alpha_n)^{h_n}$$

avec a_n qui correspond au coefficient de plus haut degré de P

Un polynôme de degré n avec n $\neq$ 0 admet n racines dans $\mathbb{C}$

De plus cette factorisation est unique à l'ordre des facteurs près.

Conséquence :

- Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}$[X] sont des polynômes de degré 1 et les polynômes constants.

Exemple : a) Trouver une racine évidente de $2X^3 + 2$ et factoriser ce polynôme dans $\mathbb{C}$[X].

6.3 Relations entre racines et coefficients

Soit P un polynôme scindé de degré n

$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \ldots + a_k X^k + \ldots + a_n X^n$

il possède n racines $/ P(X) = a_n.(X-\alpha_1).(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_n)$

- somme des racines : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- produit des racines 2 par 2 : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha_j = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
- produit de toutes les racines : $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

7 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

7.1 Racines réelles

Soit P un polynôme à coefficients réels, si α est une racine complexe de P alors P(α) = 0 et $\overline{\alpha}$ est aussi une racine complexe de P donc P($\overline{\alpha}$) = 0

$P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.X^k \in \mathbb{R}$ [X], alors P ∈ $\mathbb{C}$ [X]

Soit α ∈ $\mathbb{C}$, une racine de P. $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.\alpha^k = 0$

$$0 = \overline{P(\alpha)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k.\alpha^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.\overline{\alpha_k} = P(\overline{\alpha}) = 0$$

donc $\bar{\alpha}$ est racine de P.

Exemple : Soit P(X) = X³ – 2 X² + X – 2 .

Montrons que ce polynôme a 2 racines complexes conjuguées.

⚠ cette propriété ne s'applique pas si P ∈ $\mathbb{C}$ [X] et P ∉ $\mathbb{R}$ [X] c'est-à-dire si P a des coefficients complexes.

Si un polynôme à coefficients **réels** a une racine complexe,
alors le nombre complexe conjugué est aussi racine de ce polynôme.

Exemple : Soit P(X) = (1 – 2i). X² + (4i – 2).X + 5 . Montrons que i est une racine complexe de P.
Est-ce que son conjugué est racine de P ?

Conséquences :

- Tout polynôme de $\mathbb{R}$ [X] admet sur $\mathbb{C}$ un nombre pair de racines non réelles.
- Tout polynôme de $\mathbb{R}$ [X] de degré impair admet une racine réelle.

7.2 Décomposition des polynômes de $\mathbb{R}$ [X] dans $\mathbb{R}$

Soit P $\in \mathbb{R}$ [X], Dans $\mathbb{C}$ [X] on a : $P(X)=a_n.\prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)^{h_i}.\prod_{j=1}^{l}(X-\beta_j)^{r_j}.(X-\overline{\beta_j})^{r_j}$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $\beta_j \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$

β est un nombre complexe et $\boxed{(X-\beta_j).(X-\overline{\beta_j}) = X^2-(\beta_j+\overline{\beta_j})X+\beta_j\overline{\beta_j} = X^2-2.\mathrm{Re}(\beta_j)X+|\beta_j|^2}$

Donc $P(X)=a_n.\prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)^{h_i}.\prod_{j=1}^{l}(X^2-2.\mathrm{Re}(\beta_j)X+|\beta_j|^2)^{r_j}$

avec $\forall$j $\in$ { 1, 2, …, k }

et $X^2-2.\mathrm{Re}(\beta_j)X+|\beta_j|^2$ a un discriminant négatif.

Cette factorisation est unique à l'ordre des facteurs près.

Conséquence :

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}$ [X] sont des polynômes de degré 1
Ainsi que les polynômes de degré 2 avec un discriminant négatif.

Exemple : Décomposer dans $\mathbb{R}$[X] et $\mathbb{C}$ [X] , le polynôme :
$P(X) = X^5 + X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 2X + 2$

8 Division suivant les puissances croissantes

Soient deux polynômes A et B $\in \mathbb{K}$[X], B ayant un coefficient constant. Pour tout m $\in \mathbb{N}$, il existe Q $\in \mathbb{K}$[X] unique et R $\in \mathbb{K}$[X] unique, tels que :

$$\boxed{\begin{array}{c} A = B.Q + X^{m+1}.R \\ \deg(Q) \leqslant m \quad \text{ou} \quad Q = 0 \end{array}}$$

Q est appelé **quotient** et R est appelé **reste** de la **division suivant les puissances croissantes** de A par B **à l'ordre m.**

Exemple :

Diviser suivant les puissances **croissantes** $1 + X$ par $1 + X^2$ à l'ordre 2.