Séries et algorithmes

Exercice 1 : En utilisant le résultat suivant : $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$ (1)

a. pour $x = 1$, que vaut l'expression (1) ; en déduire que la série de terme général $\frac{1}{n!}$ converge et donner sa valeur.

b. pour $x = -1$, que vaut l'expression (1) ; en déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n!}$ converge et donner sa valeur.

Exercice 2 : Préciser pour chaque série, si elle converge et justifier :

a. série de terme général $\frac{1}{n}$
b. série de terme général $\frac{1}{n^2}$
c. série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$
d. série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$
e. série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
f. série de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$
g. série de terme général $\frac{1}{(n+1)^4}$
h. série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$
i. série de terme général $\frac{(-1)^n}{n!}$
j. série de terme général $\frac{1}{n!}$

Exercice 3 : Programmation à la calculatrice

Soit une suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$ pour tout entier strictement positif

a. Programmer la série $\sum u_n$ avec la boucle for. Pour calculer la série pour $N = 10$ puis 100 puis 1000, vous allez
   (a) taper $N : 10$;
   (b) puis demander à l'utilisateur d'entrer le nombre N
   en utilisant l'instruction suivante : $N : read("N = ", N)$;

b. Programmer la série $\sum u_n$ avec la boucle While.
Comparer la valeur de la série à sa limite $\frac{\pi^2}{6}$.
Si l'écart est inférieur à 10^{-2} on s'arrête et on affiche le nombre de termes.
ATTENTION : dans la boucle While, le compteur n'est pas incrémenté automatiquement !

Exercice 4 : Programmation avec Maxima

Programmer la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$ comme dans l'exercice précédent avec le logiciel Maxima.

a. Syntaxe de la boucle for
for i : 1 thru N do (instruction1, instruction2, instruction3) ;

b. Syntaxe de la boucle while
while condition do (instruction1, instruction2, instruction3) ;

c. Calcul de la somme de la série avec l'instruction "simpsum"

Exercice 5 :

Même exercice que le précédent pour la série de terme général $u_n = \frac{1}{n!}$ pour tout entier.

a. en utilisant la factorielle $i!$

b. sans utiliser la factorielle (c'est à dire avec une variable supplémentaire k).

Exercice 6 :

Même exercice que le précédent pour la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ pour tout entier en utilisant l'instruction *odd*.

Exercice 7 : Préciser pour chaque suite, si elle converge et justifier :

a. suite de terme général $\frac{\ln(n)}{e^n}$

b. suite de terme général $\frac{1}{n^2}$

c. suite de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

d. suite de terme général $\frac{2n+1}{3n+2}$

e. suite de terme général $\frac{e^n}{\ln(n)}$

f. suite de terme général $\frac{2n+1}{3n^2+2}$

g. suite de terme général $\frac{(-1)^n}{n!}$

h. suite de terme général $\frac{1}{n!}$

i. suite de terme général $\frac{2n^2+1}{3n+2}$