TD 7
Formules de Taylor et développements limités

Exercice 1 : Montrer, en utilisant le théorème ou l'inégalité des accroissements finis, que :

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad e^x \geqslant 1 + x$

b) Soient deux nombres a et b, tels que $0 < a < b < \pi / 2$ $\quad 0 < \tan b - \tan a \leqslant \dfrac{b-a}{\cos^2 b}$

Exercice 2 : Montrer en utilisant le théorème de Rolle, que $X^n + a.X + b$ (n entier et a,b réels) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 3 : Soit f une fonction définie, continue sur R^+ dont la dérivée f ' est décroissante et positive sur $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$
Montrer, en utilisant deux fois l'inégalité des accroissements finis, que :

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$$

Exercice 4 : Déterminer le nombre $c \in\,]a,b[$, en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \alpha.x^2 + \beta.x + \gamma$ sur $[a,b]$ (α, β, γ étant des nombres réels).

Exercice 5 :

a) Donner les développements limités au voisinage de 0, des fonctions :

$f_1(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ (ordre 4) $\qquad f_2(x) = \sqrt{1+x}$ (ordre 4) $\qquad f_3(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ 2 méthodes (ordre 3)

b) Donner les développements limités à l'ordre 4 des fonctions :

$f_1(x) = \ln x$ (au point 1) $\qquad f_2(x) = \sqrt{1+x}$ (au point 1) $\qquad f_3(x) = e^{\cos x}$ (au point $\dfrac{\pi}{2}$)

c) Soit la fonction $f(x) = e^x$

i. Donner le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 1, de cette fonction
ii. Donner le développement de Taylor-Young à l'ordre 4, en $x_0 = 1$ de cette fonction

Exercice 6 : Donner les développements limités à l'ordre n, au voisinage de 0, des fonctions

a) $f_1(x) = \dfrac{3\sin x}{2+\cos x}$ pour n = 5 $\qquad$ b) $f_2(x) = e^{\cos x}$ pour n = 4 $\qquad$ c) $f_3(x) = \sqrt{1+\sqrt{1-x}}$ pour n = 2

Exercice 7 : Calculer les limites suivantes à l'aide des développements limités :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos x - (e^x - 1)^2}{\sin^3 x}$ $\qquad$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^{\sin x}$ $\qquad$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - sh\, x}{\tan x - th\, x}$ $\qquad$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{e^{sh\, x} - e^x}$

Exercice 8 : Etude des branches infinies en $+\infty$ de la fonction f définie par f (x) = $f(x) = x.\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right).\sqrt{x^2-1}$

Donner la position relative de la courbe représentative de f et de son asymptote en $+\infty$.

Exercice 9 : Etude de la branche infinie de f en $+\infty$: $\qquad f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right).\sqrt{x^4 + x^3 + 1}$

Donner la position relative de la courbe représentative de f et de son asymptote en $+\infty$.

Exercice 10 : Soit $\mathcal{C}$ d'équation : $\qquad y = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

Déterminer une courbe Γ, asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$, et préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et Γ.