Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle

Exercice 1 : On considère les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Calculer gof et fog. Conclusion.

Exercice 2 : Montrer que tout polynôme réel de degré impair, a au moins une racine réelle.

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x.e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x.lnx & \text{si } x > 0 \end{cases}$ f est-elle continue ?

Exercice 4 : : Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{1}{|x|+1}$. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$

Exercice 5 : : Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $x^2 + \sqrt{x} - \lambda = 0$ admet-elle une unique racine dans l'intervalle fermé $[0,\ 1]$

Exercice 6 : : Soit f définie par : $f(x) = x + \frac{\ln|x|}{|x|}$

a. Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.

b. Montrer que f s'annule sur $]\ 0{,}1[$

Exercice 7 : : Montrer qu'il existe un unique $x \in]0, +\infty[$ tel que $\ln(x) = \frac{1}{e^x}$

Exercice 8 : : Peut-on prolonger par continuité en 0, les fonctions suivantes : $f(x) = \frac{x}{2x+|x|}$ et $g(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$

Exercice 9 : : On considère la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & E(x) + \sqrt{x - E(x)} \end{array} \right.$ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 10 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \geq 2 \\ e^{x-2} - 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ f est-elle continue et dérivable au point 2 ?

Exercice 11 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 2 \\ \frac{8}{x^3} - 1 & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$ f est-elle continue et dérivable en 2 ?

Exercice 12 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

Soit la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ m(m \in \mathbb{R}) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Pour quelle valeur de m, la fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) =\mid x - 1 \mid$ est-elle continue et dérivable en 1 ?

Exercice d'application : Fonctions logistiques qui décrivent l'évolution d'une population.
Applications en économie, biologie, chimie, statistique...

On repique des plants de 10 cm de haut sous une serre.
On sait que la taille maximale de ces plantes est de 1 m. On note $f(t)$ la taille, en m, d'un plant après t jours. On a donc $f(0) = 0,1$. Le modèle de Verhulst consiste à considérer que la vitesse de croissance de la plante évolue suivant la relation $f(t) = \frac{1}{Ce^{-at}+1}$ où a est une constante dépendant des conditions expérimentales et C une constante dépendant des conditions initiales.

a. Démontrer que $C = 9$
b. On observe qu'au bout de 15 jours, la plante mesure 19 cm. Calculer e^{-15a}
c. Démontrer que l'équation $e^{-15a} = \frac{9}{19}$ a une unique solution dans $[0; +\infty[$
d. En déduire la valeur de a arrondie au centième. Par la suite, on prendra cette valeur pour a.
e. Démontrer que l'équation $f(t) = 0,9$ a une unique solution t_0 dans $[0; +\infty[$
f. Déterminer t_0 arrondi au dixième
g. En déduire au bout de combien de jours, la plante dépassera 90 cm.