TD Polynômes

Exercice 1 : Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes P(x) suivant :

a) $P(x) = 3(1+2ix^2)^3$.
b) $P(x) = Q(x).R(x)$ avec $Q(x) = \pi$ et $R(x) = ((1+i)x^2+2).(-ix-1)$ (ne pas calculer le produit)
c) $P(x) = Q(x) + R(x)$ avec $Q(x) = x + 1 - \sqrt{2}\, x^8$ et $R(x) = x^6 + x^5 + \sqrt{2}\, x^8 - x$

Exercice 2 : Effectuer les divisions euclidiennes des polynômes :

a) $X^8 - X^7 - X^3 - 3X^2 + 4X - 8$ par $X^7 - 3X + 1$
b) $2X^4 + X^3 + 8X^2 + 5X$ par $X^3 + 3X + 1$
c) $X^3 + (1 - i)X^2 - 2iX - 2 - 2i$ par $X + 1 - i$
d) $X^3 - 3mX^2 + (1 + 3m^2)X - m^3 - m$ par $X - (m + i)$ avec m un réel donné.
e) $X^{10} - 1$ par $X^2 - 1$. En déduire $X^n - 1$ par $X^2 - 1$ avec n pair.
f) $2X^3 + 3X + 2$ par $X^2 + X$
g) $X^5 + X^3 + 4$ par X^5

Exercice 3 : Est-ce que les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{C}[X]$ (justifiez) ?
Si non, écrivez-les sous forme de produit de polynômes irréductibles.

a) $P(X) = 2X^2 - X - 1$
b) $P(X) = 2X^2 - X + 1$
c) $P(X) = X^2 + (1 - \pi)X - \pi$
d) $P(X) = X^2 - iX + 2$
e) $P(X) = \sqrt{3}$
f) $P(X) = X^3 - X^2 - 2X$

Exercice 4 : Ecrire sous forme de produits de polynômes irréductibles, les polynômes suivants :

a) $P(X) = X^4 + X^3 - 3X^2 - X + 2$
b) $P(X) = X^4 - 1$
c) $P(X) = X^4 - 3X^2 - 4$
d) $P(X) = X^3 - 3X + 2$
e) $P(X) = X^5 - X^4 - 2X^3 - X^2 + X + 2$

Exercice 5 : Calculer les racines multiples du polynôme A puis factorisez ce polynôme.

a) $A(X) = 4X^3 - 3X - 1$
b) $A(X) = X^3 + 3X^2 - 4$

Exercice 6 : Factoriser les polynômes suivants :

a) $P(X) = X^3 - 10X^2 + 27X - 18$
b) $P(X) = X^6 - 10X^5 + 23X^4 + 20X^3 - 49X^2 - 10X + 25$
c) $P(X) = X^4 - 2X^2 + 1$
d) $P(X) = X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4$
e) $P(X) = X^6 - 2X^5 + 7X^4 - 4X^3 + 11X^2 - 2X + 5$ dans ≤[X] et dans ϒ[X]

Exercice 7 : Montrer que le polynôme $P(X) = 1 + \dfrac{X}{1!} + \dfrac{X^2}{2!} + \ldots + \dfrac{X^n}{n!}$ n'admet pas de racines multiples (démonstration par l'absurde – supposons α racine multiple, calculer $P(\alpha)$ et $P'(\alpha)$).

Exercice 8 : Montrer que le polynôme $B(x) = (x - 1)^2$ divise le polynôme $A(x) = x^{n+1} - x^n - x + 1$

Exercice 9 : Factoriser dans ≤[X] le polynôme suivant : $P(x) = x^7 - 5x^6 + 8x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 5x + 1$
Chercher d'abord 3 racines évidentes, puis pour factoriser le polynôme de degré 4, on effectuera un changement de variable en posant $y = x + 1/x$

Exercice 10 : Soit un polynôme P ∈ ϒ[X], de degré supérieur ou égal à 2.

a) Le reste de la division euclidienne de P par $X + 1$ est α avec α ∈ ϒ. Ecrire la formule correspondante
b) Le reste de la division euclidienne de P par $X - 2$ est β, avec β ∈ ϒ. Ecrire la formule correspondante
c) On se propose de calculer le reste R(X) de la division euclidienne de P par $X^2 - X - 2$, sans chercher à calculer le quotient. Ecrire la formule correspondante
d) Quel est le degré du polynôme reste R(X) dans cette division ?
e) Calculer $P(-1)$ et $P(2)$, $R(-1)$ et $R(2)$
f) En déduire R(X).

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}$, et n □ 2 avec $P_n(X) = (X - 2)^{2n} + (X - 1)^n - 2$
Déterminer le reste dans la division euclidienne de P_n par $(X - 2)(X - 1)$, sans chercher à calculer le quotient.

Exercice 12 : Décomposer le polynôme suivant sur ≤[X], sachant qu'il admet une racine réelle :
$P(x) = 2x^3 - (5 + 6i)x^2 + 9ix + 1 - 3i$

Aide : soit α la racine de P – on calcule P(α) c'est un nombre complexe qui est égal à 0 → partie entière nulle et partie imaginaire nulle

Exercice 13 : Soit P un polynôme de $\mathbb{K}$ [X] de degré n $\in \mathbb{N}$
a) Quel est le degré du polynôme P(X ²) ?
b) Quel est le degré du polynôme P(X+ 1) – P(X) ?

Exercice 14 : Soit n $\in \mathbb{N}^*$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par (sans calculer le quotient) :
a) X + 3 b) X ² – 6 X – 16 c) (X – 1) ² (X – 2) *(1 est racine double de ce polynôme)*

Exercice 15 : Déterminer tous les polynômes P $\in$ X [X] tels que : P(X+1) = P(X)
Aide : on appellera α une racine de P

Exercice 16 : Déterminer tous les polynômes P $\in$ X [X] tels que : P(X ²) = (X ² +1).P(X). Le degré de P vaut n.
a) Déterminer le degré de P(X ²) et le degré de (X ² +1).P(X) en déduire la valeur de n
b) Calculer P(1) et P(i ²)

Exercice 17 : On pose P(X) = (X ² – X + 2)² + (X – 2)²
a) Calculer P(2i)
b) Factoriser P dans ϒ[X] et dans ≤[X]

Exercice 18 : Soit $\theta \in \Upsilon$ et n $\in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme P(X) = $(X \sin\theta + \cos\theta)^n$ par X ² + 1 sans calculer le quotient.

Exercice 19 : Trouver un polynôme P de degré 5 tel que P(X) + 1 soit divisible par $(X – 1)^3$ (1)
et P(X) – 1 soit divisible par $(X + 1)^3$ (2)
a) Ecrire les 2 relations (1) et (2)
b) Déterminer les racines de P(X) + 1 et de P(X) – 1 avec leur ordre de multiplicité *(calcul de dérivées)*

Exercice 20 : Soient p et q deux nombres complexes tels que q ≠ 0. On note a, b et c les racines de $z^3 + p z + q$.
Exprimer en fonction de p et q : a + b + c abc $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$
Retrouver ces résultats à l'aide d'un théorème.

Exercice 21 : Effectuer les divisions suivant les puissances **croissantes** de X:
a) à l'**ordre 3** de X ² + X + 1 par 1 - X + X ²
b) à l'**ordre 2** de x ² - x + 1 par 1 + x ² - x ³ et indiquer le reste de cette division

Exercice 22 : (*Final 2012 – MT11*) Pour tout entier naturel n non nul, on définit le polynôme $P_n \in \mathbb{R}$ [X] par :
$P_n(X) = n X^{n+1} – (n+1) X^n + 1$
a) Calculer son polynôme dérivé P'_n(X)
b) Démontrer que 1 est la seule racine multiple de P_n(X).
c) On considère la fonction définie par : $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + … + x^n$, où n $\in \mathbb{N}^*$.
  i. En identifiant f(x) comme étant la somme des premiers termes consécutifs d'une suite géométrique, calculer de deux façons différentes f ' (x) pour x ≠ 1.
  j. En déduire le quotient de la division euclidienne de P_n(X) par (X – 1)².
d) On note Q_4 (X) le quotient de la division euclidienne de P_4(X) par (X – 1)² et on désigne par a, b et c les racines complexes du polynôme Q_4 (X).
  i. Factoriser Q_4 (X) en fonction de a, b et c dans X [X].
  j. Calculer la somme $\sigma = \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$