

Aleth Chevalley

*Calculatrice et fiches autorisées*Problème :

Le but de ce problème est d'étudier les fonctions $f(x) = \arcsin\left(\frac{2}{x}\right)$

et $g(x) = \left(\frac{x^2}{2+x}\right) + \arcsin\left(\frac{2}{x}\right)$

1. (4 points) Déterminer le domaine de définition de la fonction f puis en déduire celui de la fonction g .

2. (8 points) Soit la fonction h définie par $h(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} + \frac{\pi}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \arcsin\left(\frac{2}{x}\right) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a. Montrer que la fonction h est continue au point $x = 2$.

b. Est-ce que la fonction h est dérivable en 2 ?

3. (6 points) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que

pour tout réel $x > 3$, $\arcsin\left(\frac{2}{x}\right) - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \geq -\frac{2}{3\sqrt{5}}(x - 3)$

4. (4 points) Montrer que $g(x) = 3$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[2,4]$ (ne pas calculer cette valeur).

5. (6 points) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction f puis de la fonction g .

6. (6 points) Etudier le comportement de la fonction g en $+\infty$. Déterminer son asymptote et la position de la courbe représentative de g par rapport à son asymptote.

Exercice : (6 points) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2 \sin x}{x^3}$