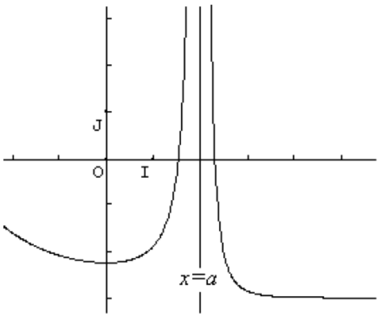
Limite de fonction, Fonctions équivalentes

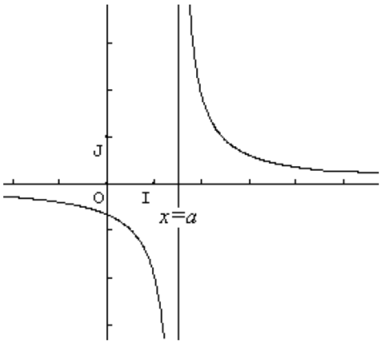
1. Limites de fonction

1.1. Limites finies ou infinies

<u>Définitions</u> :

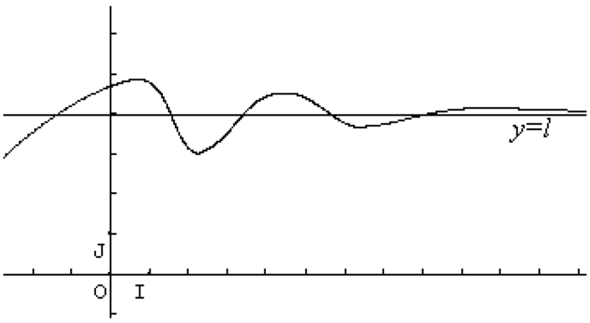
- Une fonction f qui tend vers ± ∞ quand x tend vers a, a une limite infinie et on note $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et (resp. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$).



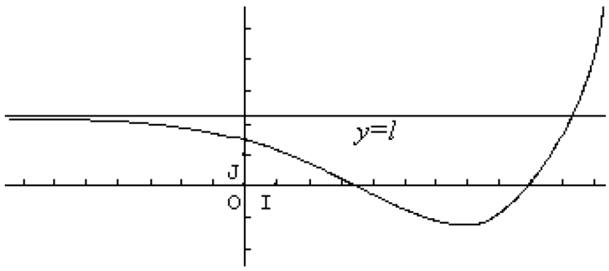


La droite d'équation x = a est asymptote verticale à la courbe représentative de f de la fonction en a.

- Une fonction f qui tend vers ℓ un réel, quand x tend vers ± ∞ a une limite finie et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$



La droite d'équation y = ℓ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction en + ∞



La droite d'équation y = ℓ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction en – ∞

- Une fonction f qui tend vers ± ∞ quand x tend vers ± ∞ a une limite infinie et on note $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Si la courbe représentative de f se rapproche de la droite d'équation y = a x + b lorsque x tend vers l'infini, alors cette droite est appelée asymptote oblique.

1.2. Pas de limite

Certaines fonctions n'ont pas de limite

<u>Exemples</u> :

a) f(x)= sin x quand x tend vers + ∞ : pas de limite

b) f(x) = sin(1/x) quand x tend vers 0 : pas de limite

1.3. Propriété des limites

- Si f (x) admet une limite en un point a alors cette limite est unique.

- Formes Indéterminées (FI) : f + g : « ∞ - ∞ » f .g : « 0 . ∞ » f / g : « ∞ / ∞ » ou « 0 / 0 »

Ces notations incorrectes sont à proscrire dans un devoir rédigé.

On cherche à lever l'indétermination.

Astuces :

- « ∞ - ∞ » : factorisation du terme dominant
- « ∞ / ∞ » : factorisation du terme dominant au numérateur et au dénominateur puis simplification
- « 0 / 0 » : factorisation d'un terme tendant vers 0 au numérateur et au dénominateur puis simplification
- Pour calculer la limite en + ∞ ou - ∞ d'un polynôme, on prend la limite du monôme de plus haut degré (ou monôme dominant).
- Pour calculer la limite en + ∞ ou - ∞ d'une fraction de polynômes, on prend la limite du quotient des monômes de plus haut degré.
- S'il y a des racines carrées, on peut utiliser la « quantité conjuguée ».
- On peut utiliser aussi la définition de la dérivée (appelée aussi taux d'accroissement) : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

Exemples :

a) Calculer la limite en + ∞ de $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 5x + 2}$.

b) Calculer la limite en 0 de $\dfrac{\sin(x)}{x}$

1.3.1. Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $\mathcal{D}$ admettant des limites respectives k, $\ell \in \mathbb{R}$ au voisinage de a

Si $\forall x \in \mathcal{D}$, f (x) ⩽ g (x) alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ donc $k \leqslant \ell$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

1.3.2. Théorème des gendarmes

Soient f , g et h trois fonctions définies sur un ensemble $\mathcal{D}$ vérifiant : $\forall x \in \mathcal{D}$, f (x) ⩽ g (x) ⩽ h (x) et

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ alors g (x) admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$

Exemple : Soit f : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Calculer la limite de f quand x tend vers + ∞

2. Limites à gauche et à droite

Soit f : $\mathcal{D}_f =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[\to \mathbb{R}$, déterminons les limites à gauche et à droite en a ?

- en se restreignant à] - ∞, a [. Cette limite s'appelle la **limite à gauche** notée $l_g = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} = \lim\limits_{x \to a^-}$

- en se restreignant à] a , + ∞ [. Cette limite s'appelle la **limite à droite** notée $l_d = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} = \lim\limits_{x \to a^+}$

Remarques :

a) Soit f une fonction telle que $\mathcal{D}_f$ =] - ∞, a [∪] a , + ∞ [

f admet une limite en a ⇔ $\begin{cases} \text{f admet une limite à gauche } l_g \text{ en a} \\ \text{f admet une limite à droite } l_d \text{ en a} \\ l = l_d = l_g = f(a) \text{ si } f(a) \text{ existe} \end{cases}$

b) Si f est définie sur] - ∞, a [

f est définie sur] - ∞, a [f admet une limite en a ⇔ f admet une limite à gauche l_g en a

c) Si f est définie sur] a , + ∞ [

f est définie sur] a , + ∞ [f admet une limite en a ⇔ f admet une limite à droite l_d en a

Exemples : Déterminer les limites des fonctions suivantes :

a) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. déterminer les limites à gauche et à droite au point 1 ?

b) Soit a ∈ ℝ. On définit sur ℝ /{a} la fonction f (x) = $\dfrac{2.(x-a)}{|x-a|}$. Déterminer les limites à gauche et à droite en a.

c) Soit g une fonction définie par g (x) = $\begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que g admet une limite à droite et à gauche de 0.
Montrer que g n'admet pas de limite en 0.

3. Fonctions équivalentes

3.1. Définition d'une fonction équivalente

Soit f, g : $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **f est** si, au voisinage de a,
f $\sim_a$ g ⇔ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$
dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de a

On note alors f $\sim_a$ g ou f $\underset{a}{\sim}$ g

3.2. Propriétés

- si f $\sim_a$ g et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ <u>alors</u> $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$

Attention ! si $\ell = 0$ ou $\ell = \infty$ alors lim f (x) $\not\sim_a$ g (x)

Exemple : $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ au voisinage de 0

- si $f \sim_a f_1$ et $g \sim_a g_1$ et alors $f.g \sim_a f_1.g_1$
- si $f \sim_a f_1$ avec f et f_1 ne s'annulant pas sur un intervalle-voisinage de a alors $\frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{f_1}$
- si $f \sim_a f_1$ avec f et f_1 strictement positives au voisinage de a alors $f^{\alpha} \sim_a f_1^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Remarques :

- si $f \sim_a f_1$ et $g \sim_a g_1$, **on n'a pas en général** $f + g \sim_a f_1 + g_1$

On ne doit pas **additionner** des équivalents.

exemple : $f(x) = x^2 + 5x + 1$ et $g(x) = -x^2 + x + 2$
Etude en $+\infty$. Calculer un équivalent de f nommé f_1, un équivalent de g nommé g_1 puis la limite de f + g et la limite de $f_1 + g_1$

- si $f \underset{a}{\sim} f_1$ et h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **on n'a pas en général** $hof \underset{a}{\sim} hof_1$

exemple :

$f(x) = 1 + x$ et $h(x) = e^x$ au voisinage de $+\infty$

3.3. Principales fonctions équivalentes

Equivalents à retenir :

$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$	$\tan(x) \underset{0}{\sim} x$	$1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} x^2/2$	$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$	$a^x - 1 \underset{0}{\sim} x.\ln a \ (a > 0)$	$(1+x)^{\alpha} - 1 \underset{0}{\sim} \alpha.x \ (\alpha \in \mathbb{R})$	

3.4. Fonctions négligeables

On dit que f est **négligeable** par rapport à g, au voisinage de a, et on note **f = o (g)**

« f est petit o de g » si et seulement si avec g ne s'annulant pas au voisinage de a,

$$f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$