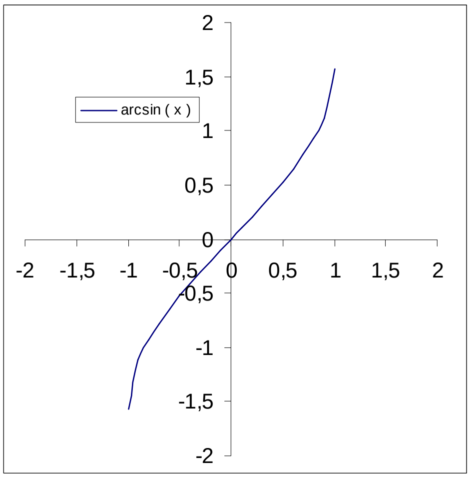
Fonctions trigonométriques réciproques

1. Fonctions trigonométriques réciproques

1.1. Arcsin



sin : $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante.

Donc sin : $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \sin([-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}])$ = est bijective.

On peut donc définir son application réciproque :
arcsin :

x $\mapsto$ y tel que sin y = x

<u>Propriétés</u> :

a) arcsin est sur [- 1 ; 1]
En effet arcsin (x) = y tel que sin y = x et sin (- y) = - x donc arcsin (- x) = - y

b) arcsin est dérivable sur] - 1 ; 1 [et

(arcsin) ‘ (x) = $\frac{1}{f'(y)}$ =

ATTENTION : ceci est valable car arcsin (x) $\in$

(arcsin) ‘ (u(x))

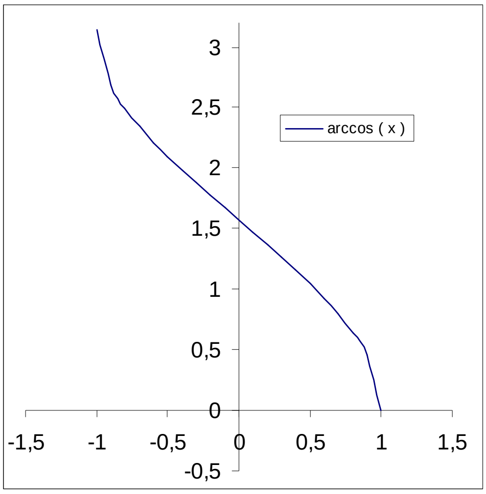
c) arcsin est continue sur [- 1 ; 1], croissante sur [- 1 ; 1]

sin (arcsin (x)) =

arcsin(sin(x)) =

<u>Exemple</u> : Trouver le développement limité de arcsin à l’ordre 5 en 0.

1.2. Arccos



cos : [0 ; π] → ℝ est continue strictement décroissante.

Donc cos : [0 ; π] → cos([0 ; π]) = est bijective.

On peut donc définir son application réciproque : arccos :

x ↦ y tel que cos y = x

D_f =

Propriétés :

a) arccos n'est ni pair, ni impair sur [- 1 ; 1]

b) arccos est dérivable sur] - 1 ; 1 [et

$$\text{(arccos) ' (x) } = \frac{1}{f\,'(y)} =$$

(arccos) ' (u(x)) =

c) arccos est continue sur [- 1 ; 1], décroissante sur [- 1 ; 1]

cos (arccos (x)) =

arccos(cos(x)) =

Remarque : ∀ x ∈] - 1 ; 1 [, (arcsin) ' (x) + (arccos) ' (x) =

Donc en intégrant, ∀ x ∈] - 1 ; 1 [, arcsin (x) + arccos (x) = ∈ ℝ et en posant x = 0 on trouve

∀ x ∈] - 1 ; 1 [, arcsin (x) + arccos (x) =

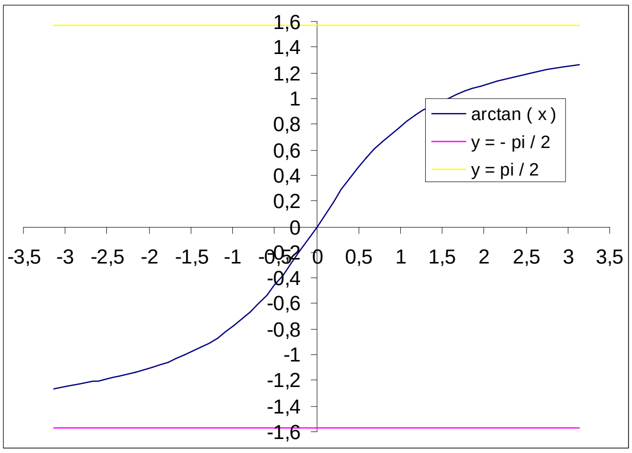
Exemple : Résoudre dans ℝ l'équation arcsin (x) = arccos (2 x) et donner le domaine de définition de cette équation

Domaine de définition

1.3. Arctan

tan : $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante.

Donc tan : $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \tan\left(\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\right) =$ est bijective.



On peut donc définir son application réciproque :
arctan :

x $\mapsto$ y tel que tan y = x

$D_f =$

<u>Propriétés</u> :

a) arctan est sur $\mathbb{R}$

b) arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{(\arctan)'(x) = \frac{1}{f'(y)}}$$

(arctan) ' (u(x))

c) arctan est continue sur $\mathbb{R}$, croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) =$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) =$

d) Utilisation des formules de trigonométrie

$$\cos(2\theta) = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \qquad \sin(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \qquad \tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$