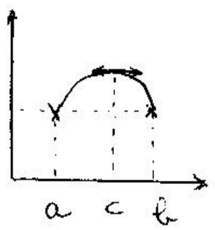
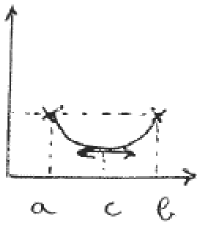
Théorème des accroissements finis
Formules de Taylor
Développements limités

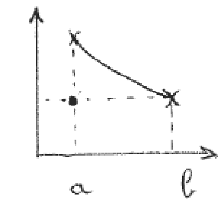
1. Théorème de Rolle

Soit f une fonction définie sur un intervalle [a,b] inclus dans $\mathbb{R}$, continue sur [a,b], dérivable sur] a,b [vérifiant f(a) = f(b) alors il existe au moins un point c de] a,b [tel que f ' (c) = 0



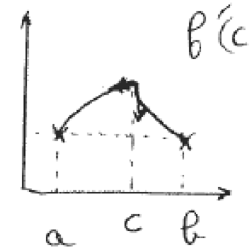


$f'(c) = 0$



non continue en a

$f'(c) \neq 0$



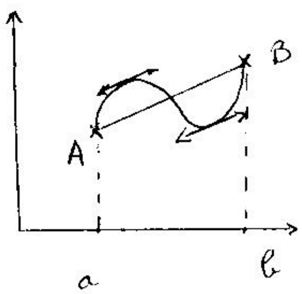
non dérivable sur] a, b [

2. Accroissements finis

2.1. Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction définie sur un intervalle [a,b] inclus dans $\mathbb{R}$, continue sur [a,b], dérivable sur] a,b [alors il existe c $\in$] a,b [tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$$



f(a) $\neq$ f(b)

A = (a ; f(a)) et B= (b ;f(b))

Il existe au moins un point d'abscisse c comprise entre a et b
où la tangente est parallèle à la droite reliant A et B

2.2. Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction définie sur un intervalle [a,b] inclus dans $\mathbb{R}$, continue sur [a,b], dérivable sur] a,b [et x $\in$] a,b [alors on a l'inégalité :

$m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$ avec $m \leq f'(x) \leq M$

(m et M étant le minorant et majorant de la fonction dérivée ; ils sont indépendants de x)

Exemple : Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[\quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$

En déduire que $\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$ converge.

3. Formule de Taylor

Rappel : $C^n([a,b], \mathbb{R})$ correspond à l'ensemble des fonctions f : [a,b] → $\mathbb{R}$, n fois dérivables avec $f^{(n)}$ continue sur [a,b]

3.1. Formule de Taylor avec reste de Young

Soit f une fonction définie sur un intervalle [a,b] inclus dans $\mathbb{R}$, et $x_0 \in [a,b]$
supposons f, n fois dérivable en x_0
alors il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, on ait

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(x-x_0)^p}{p!} . f^{(p)}(x_0) + (x-x_0)^n . \varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

ou $f(x) = f(x_0) + (x-x_0).f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}.f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}.f^{(3)}(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!}.f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n.\varepsilon(x)$

c'est le **développement de Taylor à l'ordre n de f avec reste de Young en x_0**.

Exemples :

a) Appliquer le théorème précédent pour ln (1 + x) en $x_0 = 0$ à l'ordre 3

b) Montrer que $\sin x \underset{0}{\sim} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ en utilisant la formule de Taylor - Young à l'ordre 7 (en 0).

4. Développements limités

4.1. Définition et propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{D}$ inclus dans $\mathbb{R}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$

4.1.1. Définition

On dit que f admet **en x_0** un **développement limité** à l'ordre **n** $\in \mathbb{N}$, s'il existe un polynôme P_n de degré n, $\alpha > 0$ et une fonction ε convergeant vers 0 en x_0 tels que :
au voisinage de x_0,

$$f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n . \varepsilon(x) \qquad \textbf{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

P_n s'appelle la **partie régulière** du développement limité.

$(x - x_0)^n . \varepsilon(x)$ s'appelle le **reste**.

Remarques :

1. $(x - x_0)^n . \varepsilon(x)$ est aussi noté $o((x - x_0)^n)$
2. Grâce à un changement de variable, on peut se ramener au cas $x_0 = 0$

Exemple :

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$ on a donc un développement limité de e^x à l'ordre n en 0.

De la même façon, on a :

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k . \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$

on a donc un développement limité en 0, de cos x à l'ordre 2k+1 ou à l'ordre 2k car le terme en x^{2k+1} est nul (comme tous les autres termes de puissance impaire), donc $o(x^{2k}) = o(x^{2k+1})$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k . \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$

on a donc un développement limité en 0, de sin x à l'ordre 2k+2 ou à l'ordre 2k+1 car le terme en x^{2k+2} est nul (comme tous les autres termes de puissance paire), donc $o(x^{2k+1}) = o(x^{2k+2})$

4.1.2. Propriétés

- Le développement limité en x_0, s'il existe, est **unique**.
- Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 alors, pour tout $p < n$, f admet un développement limité à l'ordre p en x_0.
- Si f admet un développement limité en x_0 alors f est continue ou prolongeable par continuité en x_0.
- Si f admet un développement de Taylor à l'ordre n en x_0, alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0.

4.2. Opérations

Soient f et g, 2 fonctions $f, g : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant des développements limités en 0 à l'ordre n tels que :

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ sur $]-\alpha, \alpha[\cap \mathcal{D}$

$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + o(x^n)$ sur $]-\beta, \beta[\cap \mathcal{D}$

4.2.1. Addition

f + g admet un développement limité en 0 à l'ordre n de partie régulière, la somme de celles de f et de g.

4.2.2. Produit

f x g admet un développement limité en 0 à l'ordre n de partie régulière, les termes de degré inférieur ou égal à n du produit de celles de f et de g.

Exemple : Trouver le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $f(x) = (\cos x - 1) . e^x$

4.2.3. Quotient

On veut calculer le développement limité de $\dfrac{f}{g}$ en supposant que $g(0) \neq 0$ (c'est-à-dire $b_0 \neq 0$).

4.2.3.1. Première méthode :

On écrit g(x) sous la forme g(x)=1+ X avec X une fonction de x s'annulant en 0. Le quotient s'écrit alors sous la forme $\dfrac{f}{g} = \dfrac{f}{1+X} = f.\dfrac{1}{1+X} = f.(1+X)^{-1}$

Connaissant le développement limité de $(1+X)^{-1} = 1 - X + X^2 + \ldots + (-1)^n . X^n + o(X^n)$,
on se ramène à un produit de développements limités.

4.2.3.2. Deuxième méthode :

Supposons que $g(0) \neq 0$ ($b_0 \neq 0$), alors $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière égale au quotient suivant les puissances croissantes à l'ordre n de P par Q où P et Q sont les parties régulières respectives de f et g.

Exemple : Trouver le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

4.2.4. Composée

Supposons que $f(0) = 0$ ($a_0 = 0$), alors g o f admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière égale aux termes de degré inférieur ou égal à n de Q o P où P et Q sont les parties régulières respectives de f et g.

Exemple : Trouver le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \dfrac{1}{1-\sin(x)}$

4.2.5. Primitive

Supposons que f soit continue sur $]-\alpha, \alpha[$, alors $F(x) = \int f(t)dt$ admet un développement limité à l'ordre n + 1 et $F(x) = \int P(x)dx + o(x^{n+1}) + K$ avec $K = F(0)$

Exemple : Trouver le développement limité en 0 à l'ordre n de $f(x) = \ln(1+x)$

Remarque : Si f admet un développement limité à l'ordre n et est dérivable,
on n'a pas obligatoirement un développement limité à l'ordre n – 1 de f ' .

Exemple : f (x) = x ² . sin $\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0, admet un développement limité

Par contre si f admet un développement limité à l'ordre n > 0 en et si **on sait** que f ' admet un développement limité à l'ordre n – 1 en 0 alors la partie régulière du développement limité de f ' s'obtient en dérivant celle du développement limité de f.

4.3. Développements limités à l'infini

4.3.1. Définition

On dit que x $\mapsto$ f (x) admet un **développement limité en + ∞ à l'ordre n** ssi x $\mapsto$ f $\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un développement limité **en 0** $^{+}$. Dans ce cas, si localement sur] 0 , α [

f $\left(\frac{1}{x}\right)$ = $P_n(x) + o(x^n)$

alors f (x) = $P_n\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ sur un intervalle du type] A , + ∞ [

On dit que x $\mapsto$ f (x) admet un **développement limité en – ∞ à l'ordre n** ssi x $\mapsto$ f $\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un développement limité **en 0** $^{-}$. Dans ce cas, si localement sur] – α , 0 [

f $\left(\frac{1}{x}\right)$ = $P_n(x) + o(x^n)$

alors f (x) = $P_n\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ sur un intervalle du type] – ∞ , A [

Une expression de la forme : $f(x) = P(x) + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$

Où x $\mapsto \pm\infty$ et où P est un polynôme, est un
développement limité généralisé au voisinage de l'infini.

Exemple : Trouver la limite lorsque x tend vers + ∞ de $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - cox\left(\frac{1}{x}\right)}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

4.4. Etudes des branches infinies

Asymptote oblique

On dit que la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f : E → F admet
la droite d'équation y = a x + b pour asymptote oblique
si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

par un simple calcul, on vérifie que : a = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ et b = $\lim\limits_{x\to\infty}$ (f (x) – a x)

Si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers une limite finie au voisinage de l'infini,
alors la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique.

Si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers une limite infinie au voisinage de l'infini,
alors la courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique dans la direction de Oy.

On détermine le développement limité f (x) = x suivant la variable $\frac{1}{x}$ pour obtenir l'équation de l'asymptote oblique.
Ce développement nous renseigne sur la position de la courbe par rapport à son asymptote oblique éventuelle :
f(x) = a x + b + $\frac{c}{x}$ + $o\left(\frac{1}{x}\right)$ ou f (x) – a x – b $\sim \frac{c}{x}$

Si c > 0, la courbe est au-dessus de son asymptote pour x → + ∞ , et en dessous pour x → - ∞.

Si c < 0, la courbe est en dessous de son asymptote pour x → + ∞ , et au-dessus pour x → - ∞.

Si c = 0, on continue le développement jusqu'au premier terme non nul en $\frac{1}{x}$.

<u>Exemple</u> : f (x) = $\frac{3x^2+x}{x+1}$ admet pour asymptote oblique la droite y = 3 x - 2