Fonctions réelles d'une variable réelle :
Dérivabilité

1. Rappels

1.1. Définition de la dérivabilité

Soit f : $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

On dit que f est **dérivable en x_0**, si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0.

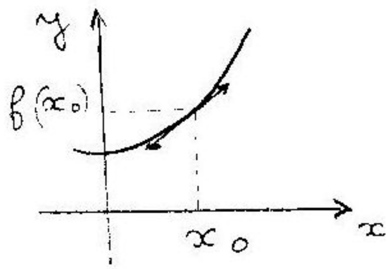
Si elle existe, cette limite est appelée dérivée de f en x_0 et notée $f'(x_0)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0)$

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou encore $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

On dit que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ si f est dérivable en tout point de $\mathcal{D}_f$.

1.2. Interprétation géométrique

Si f est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0)$ alors la courbe de f a une tangente T_{x_0} en x_0 d'équation :



$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ alors la fonction n'est pas dérivable au point x_0 et la courbe de f admet une tangente verticale.

<u>Exemples</u> :

a) Soit f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ Utiliser la définition de la dérivée pour cette fonction

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

2. Dérivabilité à gauche ou à droite

Soit f : $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

On dit que f est **dérivable à gauche en x_0** si :

f est définie sur $]x_0 - \alpha, x_0[$ avec $\alpha > 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe

Cette limite est alors notée f ' (x_0^-) ou f_g' (x $_0$) et appelée dérivée à gauche en x $_0$.

On dit que f est dérivable à droite en x $_0$ si :

f est définie sur] x$_0$, x$_0$ + α [avec α>0 et $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe

Cette limite est alors notée f ' (x_0^+) ou f_d' (x $_0$) et appelée dérivée à droite en x $_0$.

<u>Théorème</u> :

f est dérivable en x $_0$ si et seulement si
f est dérivable à gauche et à droite en x $_0$
et f ' (x_0^-) = f ' (x_0^+)

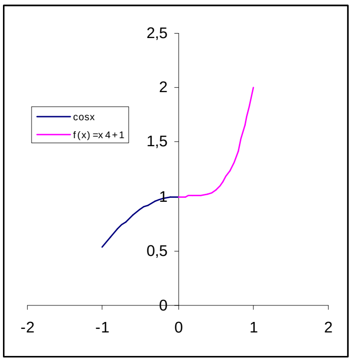
<u>Exemples</u> :

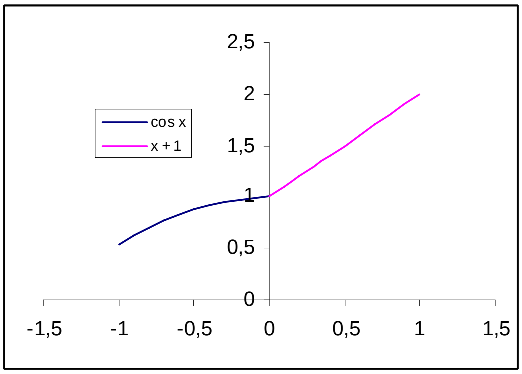
a) f : ℝ → ℝ

x ↦ $\begin{cases} \cos x & si \;\; x \leq 0 \\ x^4 + 1 & si \;\; x > 0 \end{cases}$ Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?

b) f : ℝ → ℝ

x ↦ $\begin{cases} \cos x & si \;\; x \leq 0 \\ x + 1 & si \;\; x > 0 \end{cases}$ Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?

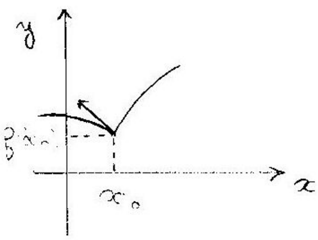


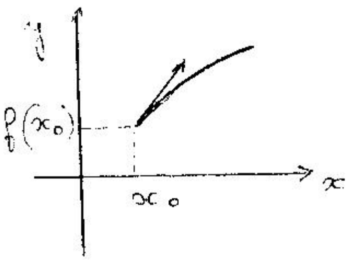


Si f est dérivable à gauche (à droite) en x $_0$, sa représentation graphique

admet au point M (x $_0$, f(x $_0$)) une demi-tangente à gauche (à droite) d'équation :

y = f_g' (x $_0$) (x – x $_0$) + f (x $_0$) (ou y = f_d' (x $_0$) (x – x $_0$) + f (x $_0$))





3. Différentielle

<u>Définition</u> : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$, on dit que f est différentiable en x_0,
s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 tels que :
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + (x - x_0).\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

ou encore $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).h + h\,\varepsilon(h)$

f est différentiable en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0.

$f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$ est un équivalent en x_0 de f.
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + (x - x_0).\varepsilon(x)$ s'appelle le
développement limité à l'ordre 1 de f en x_0.

4. Propriétés

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

<u>Remarque</u> : La réciproque est fausse.
Par exemple, la fonction définie par $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas dérivable en 0.

5. Classe d'une fonction

Soit n un entier naturel non nul. On dit que la fonction f est **de classe C^n** (ou n fois continûment dérivable) sur un intervalle I si elle est n fois dérivable sur I et si la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

La fonction f est dite de classe C^0 sur I si elle est continue sur I.

La fonction f est dite de classe $C^{+\infty}$ sur I (ou indéfiniment dérivable) si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, elle est indéfiniment dérivable sur I.
donc f est de classe C^n avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f est de classe $C^{+\infty}$ ou $f \in C^{+\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

<u>Exemple</u> : Soit $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $f^{(k)}(x) = n.(n-1).(n-2)\ldots(n-k+1).x^{n-k}$ sur I.
Si $k = n$ $\quad f^{(n)}(x) = n.(n-1).(n-2)\ldots(n-n+1).x^{n-n} = n!$ et $\quad f^{(n+1)}(x) = 0$

6. Fonctions réciproques

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = y$ et $f(I) = J$

Si f est continue et strictement monotone sur I, f est bijective de I sur $f(I) = J$

Soit f^{-1} sa fonction réciproque : $\quad f^{-1} : J \to I$
$y \mapsto x$ tel que $f^{-1}(y) = x$

on a alors $f \circ f^{-1} = Id_J$ et $f^{-1} \circ f = Id_I$.

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f^{-1} est continue sur l'intervalle J = f (I)

Proposition : Si, de plus, f est dérivable sur I et si sa dérivée ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

Démonstration : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ or $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$

$d f(x) = f'(x)\, dx$ donc $dy = f'(f^{-1}(y))\, d f^{-1}(y)$

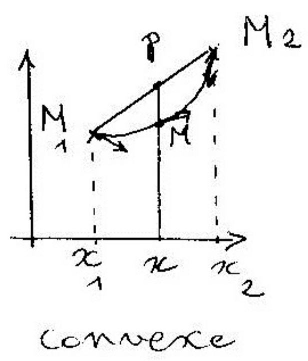
Exemple :

$f : x \mapsto \ln x = y$. Calculer $(f^{-1})'(y)$?

7. Etude locale de fonctions

7.1. Fonctions convexes

On dit qu'une fonction f est définie sur [a, b],
est convexe sur [a, b],
si l'arc M_1M_2 est en-dessous de la corde M_1M_2
et la courbe est au-dessus de ses tangentes.



Théorème :

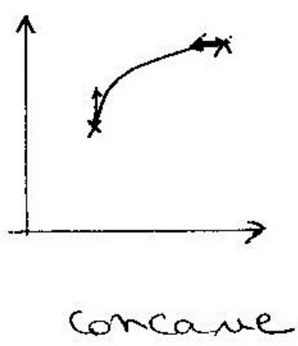
Si f est dérivable et sa dérivée est croissante
sur [a, b], alors f est convexe sur [a, b]

Si f est deux fois dérivable et si
f '' est positive sur [a, b],
alors f est convexe sur [a, b] et la courbe
est au-dessus de ses tangentes.

7.2. Fonctions concaves

Théorème :

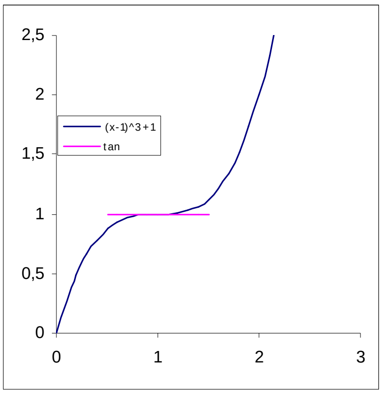
Si f est deux fois dérivable et si
f '' est négative sur [a, b],
alors f est concave sur [a, b] et la courbe est
en-dessous de ses tangentes.



7.3. Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable
au voisinage de x_0,
si f est convexe sur $]\, x_0 - \alpha, x_0\,]$
et concave sur $[\, x_0, x_0 + \alpha\, [$, (ou vice versa)
alors le point d'abscisse x_0
de la courbe représentative de f
est appelé point d'inflexion

Au point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente.



Théorème :

> Si f '' s'annule en changeant de signe en x_0, alors le point d'abscisse x_0 est un point d'inflexion de la courbe.

Si $f''(x_0) = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f''(x_0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f''(x_0)$ sont de signes contraires alors la courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse x_0

Exemple : f (x) = tan x. Déterminer le point d'inflexion en 0 ?

7.4. Extremum d'une fonction dérivable

Définitions :

On dit que f admet un maximum local en x_0, ssi $\exists \alpha > 0 \ / \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap D,\ f(x) \leq f(x_0)$
ou encore $\boxed{f'(x_0) = 0 \text{ et } f''(x_0) < 0}$

On dit que f admet un minimum local en x_0, ssi $\exists \alpha > 0 \ / \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap D,\ f(x) \geq f(x_0)$
ou encore $\boxed{f'(x_0) = 0 \text{ et } f''(x_0) > 0}$

On dit que f admet un extremum en x_0, si elle admet un minimum ou un maximum.

Si f admet un extremum en x_0, on dit que x_0 est un point stationnaire ou un point critique.

Exemple : f (x) = sin x. Chercher un maximum pour cette fonction ?

Attention : si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) = 0$, la fonction n'admet pas obligatoirement d'extremum en x_0

Exemples :

$f(x) = x^3$ Etude au point 0.

$f(x) = x^4$ Etude au point 0.