Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle

1. Définition de la continuité

1.1. Continuité en un point, sur un domaine

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ (un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel est définie f : ce n'est pas nécessairement le plus grand).

$$f : \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que f (x) est **continue** en x_0 si la limite de f (x) existe en x_0
(dans ce cas cette limite sera f (x_0))

f est dite continue sur un ensemble $\mathcal{D}$, si elle est continue en tout point de D.

Exemples : a) $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

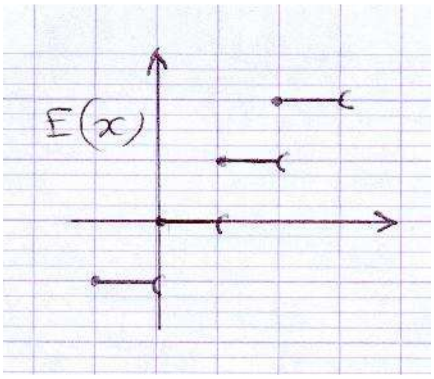
b) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

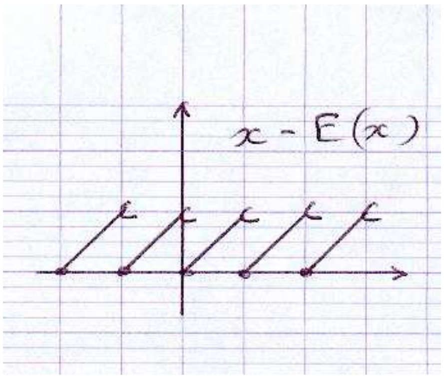
c) $x \mapsto E(x)$

E(x) s'appelle « partie entière de x », définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur] n, n+1 [
mais n'est pas continue en n (si $x \in \mathbb{Z}$).

avec E(x) = n si $x \in$ [n, n+1 [

Si on restreint la fonction à] n, n+1 [alors la fonction est continue sur cet intervalle.





d) la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \quad si\ x \neq 0 \\ f(x) = 1\ si\ \ x = 0 \end{cases}$$

est continue en 0. Cette fonction s'appelle

le prolongement par continuité de $\dfrac{\sin x}{x}$

Remarque : La continuité est une propriété locale. Pour montrer la continuité en x_0,
il suffit de travailler sur un intervalle autour de x_0.

1.2. Continuité à gauche ou à droite en un point

Définition : Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que $f(x)$ est continue à gauche en x_0, si f est définie sur un intervalle du type $]x_0 - \alpha, x_0[$ avec $\alpha > 0$ et la limite à gauche de f(x) existe en x_0 et vaut $f(x_0)$.

On dit que $f(x)$ est continue à droite en x_0, si f est définie sur un intervalle du type $]x_0, x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$ et la limite à droite de f(x) existe en x_0 et vaut $f(x_0)$.

Exemple : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x - E(x)$$

est continue à gauche et à droite en x pour tout $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ mais n'est pas continue à gauche en $x \in \mathbb{Z}$.

> f est continue en x_0, si et seulement si f est continue à gauche et à droite en x_0.

1.3. Propriétés de la continuité

Soient les fonctions f et g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en x_0 alors

- $f + g$ est continue en x_0.
- $f . g$ est continue en x_0.
- si $f \neq 0$ en x_0, alors $1 / f$ est continue en x_0.

Théorème : Soient les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en x_0 et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Ces propriétés proviennent directement des propriétés des limites.

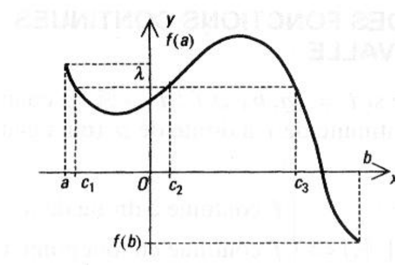
Les fonctions polynômes, sinus, cosinus exponentielles sont continues sur $\mathbb{R}$.

La fonction logarithme est continue sur $]0, +\infty[$
et la fonction racine est continue sur $[0, +\infty[$

2. Théorèmes des valeurs intermédiaires (TVI)

2.1. TVI

> Soit f une fonction continue
> sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
> Pour tout réel c compris entre f(a) et f(b)
> alors il existe au moins un réel x appartenant à [a, b] tel que f(x) = c

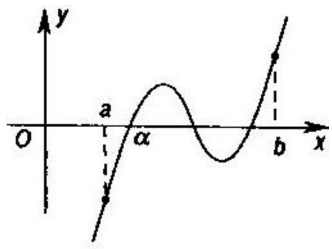


2.2. Théorème de Bolzano

Cas particulier : f(a) et f(b) sont de signes contraires

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a, b] de $\mathbb{R}$, telle que f(a) et f(b) sont de signes contraires (f(a) . f(b) < 0) alors il existe au moins un réel α tel que $f(\alpha) = 0$.



Exemple : Soit la fonction $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-2$ définie sur [0 , 2]
Montrons que cette fonction admet au moins une racine α telle que $f(\alpha) = 0$?

2.3. Théorème de la bijection

Cas particulier : f est strictement monotone sur [a, b]

Soit f une fonction continue sur [a, b] $\subset \mathbb{R}$ f : [a, b] → $\mathbb{R}$ et strictement monotone sur [a, b]
pour tout réel c compris entre f(a) et f(b) alors il existe un unique réel x appartenant à [a, b] tel que f(x) = c

De plus si f(a) et f(b) sont de signes contraires
alors il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

2.4. Généralisation du TVI

Généralisation : Soit f une fonction continue et monotone sur un intervalle I de bornes a et b, finies ou infinies, pour tout réel c strictement compris entre les limites de f en a et b, il existe un unique x de I tel que f(x)= c, autrement dit l'équation f(x) = c admet une solution unique dans I.

Tous les polynômes de degré impair ont au moins une racine α telle que $f(\alpha) = 0$

Exemple : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)= x^3 - 2x^2 + x - 4,3$
Montrons que, l'équation $x^3 - 2x^2 + x - 4,3 = 0$ admet au moins une solution.