# Fractions rationnelles

## 1. Généralités

### 1.1. Rappels

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- Un polynôme s'écrit sous la forme : $P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k . X^k$ avec $a_k = 0$ sauf

pour un nombre fini de k  et P(X) $\in \mathbb{K}_n[X]$

### 1.2. Définition d'une fraction rationnelle

On appelle **fraction rationnelle à une indéterminée X sur K** et on note $\dfrac{A(X)}{B(X)}$,

le quotient de deux polynômes avec $A(X) \in \mathbb{K}[X]$ et $B(X) \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$

On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à une indéterminée sur $\mathbb{K}$.

<u>Exemple</u> : $F(X) = \dfrac{X^3 + 5X^2 + X + 5}{X^4 + 5X^3}$ est une fraction rationnelle

$F(X) \in \mathbb{K}(X)$

### 1.3. Opérations sur $\mathbb{K}(X)$

On peut définir sur $\mathbb{K}(X)$ les opérations suivantes :

- $\dfrac{P(X)}{Q(X)} + \dfrac{R(X)}{S(X)} = \boxed{\dfrac{P(X).S(X) + R(X).Q(X)}{Q(X).S(X)}}$
- $\dfrac{P(X)}{Q(X)} x \dfrac{R(X)}{S(X)} = \boxed{\dfrac{P(X).R(X)}{Q(X).S(X)}}$

## 2. Racines et pôles d'une fraction rationnelle

### 2.1. Fraction irréductible

On dit qu'une fraction rationnelle $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ est irréductible  si P ( X ) et Q ( X ) sont premiers entre eux.

Il existe toujours un représentant irréductible d'une fraction rationnelle
(il suffit de diviser P ( X ) et Q ( X) par un PGCD).

<u>Exemple</u> : $F(X) = \dfrac{X^3 + 5X^2 + X + 5}{X^4 + 5X^3} = \boxed{\dfrac{(X+5).(X^2+1)}{X^3(X+5)} = \dfrac{X^2+1}{X^3}}$

## 2.2. Définition d'une racine

Soit F( X ) = $\frac{P(X)}{Q(X)}$ irréductible.

On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une **racine d'ordre h** $\in \mathbb{N}$ de F ( X ) si $\alpha$ est racine d'ordre h de P ( X )

## 2.3. Définition d'un pôle

Soit F( X ) = $\frac{P(X)}{Q(X)}$ irréductible.

On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est un **pôle d'ordre h** $\in \mathbb{N}$ de F ( X ) si $\alpha$ est racine d'ordre h de Q ( X )

<u>Exemple</u> : a) Trouver les racines et les pôles de F ( X ) = $\frac{X^4+X^3+2X^2+X+1}{X^3+3X^2+X+3}$

Pôle X = - 3

$$\begin{array}{l|l} X^3+3X^2+X+3 & X+3 \\ \hline -(X^3+3X^2) & X^2+1 \\ \quad X+3 & \\ \quad -(X+3) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

donc

$Q(X) = (X+3)(X^2+1)$

Racines de P (X) ? $\quad X = -3$ n'est pas racine de P(X)

On essaie de diviser P (X) par $X^2+1$

$$\begin{array}{l|l} X^4+X^3+2X^2+X+1 & X^2+1 \\ \hline -(X^4+X^2) & X^2+X+1 \\ \quad X^3+X^2+X+1 & \\ \quad -(X^3+X) & \\ \quad X^2+1 & \\ \quad -(X^2+1) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

Donc le polynôme P ( X ) s'écrit P ( X ) = ( X $^2$ + 1 ).( X $^2$ + X + 1 ) et Q ( X ) s'écrit Q ( X ) = ( X $^2$ + 1 ).( X + 3 )

Forme irréductible : F( X ) = $\frac{X^2+X+1}{X+3}$

Racines de P ( X ) : $\Delta$ = 1 – 4 = - 3 < 0 deux racines ( -1 + i$\sqrt{3}$ ) / 2 et ( -1 - i$\sqrt{3}$ ) / 2

deux racines d'ordre 1 dans $\mathbb{C}$ ( pas de racine dans $\mathbb{R}$) et un pôle d'ordre 1 qui vaut - 3

b) Trouver les racines et les pôles de $F(X) = \dfrac{X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 10X + 3}{X^2 + 8X + 16}$

Racines de P ( X ) : 1 racine évidente

$$
\begin{array}{r|l}
X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 10X + 3 & X - 1 \\
\hline
-\quad X^4 - X^3 \qquad\qquad\qquad\qquad & X^3 - 5X^2 + 7X - 3 \\
\hline
-5X^3 + 12X^2 - 10X + 3 & \\
-\quad -5X^3 + 5X^2 \qquad\qquad & \\
\hline
7X^2 - 10X + 3 & \\
-\quad 7X^2 - 7X \qquad & \\
\hline
-3X + 3 & \\
-\quad -3X + 3 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

1 est racine évidente de $X^3 - 5X^2 + 7X - 3$

$$
\begin{array}{r|l}
X^3 - 5X^2 + 7X - 3 & X - 1 \\
\hline
-\quad X^3 - X^2 \qquad\qquad\qquad & X^2 - 4X + 3 \\
\hline
-4X^2 + 7X - 3 & \\
-\quad -4X^2 + 4X \qquad & \\
\hline
3X - 3 & \\
-\quad 3X - 3 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

or $X^2 - 4X + 3 = (X - 1).(X - 3)$

donc $P(X) = (X - 1)^3.(X - 3)$ et $Q(X) = (X + 4)^2$

forme irréductible : 1 est racine d'ordre 3, 3 est racine d'ordre 1 et – 4 est pôle d'ordre 2.

# 3. Décomposition d'une fraction rationnelle

## 3.1. Pôles réels simples

Soit F ( X ) = $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{R}$ ( X ), avec deg ( A ) < deg ( B) et B(X) ne comportant que des éléments de la forme (X – λ ) racines réelles simples, alors F ( X ) se **décompose de façon unique** dans $\mathbb{R}$ **( X )** comme une somme d'éléments du type :

$$\boxed{\frac{a_i}{(X-\lambda_i)}} \text{ avec } a_i\,,\lambda_i \in \mathbb{R}$$

dont les dénominateurs divisent B ( X ).

$$F(X) = \frac{A(X)}{B(X)} = \frac{A(X)}{(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_i)} = \frac{a_1}{X-\lambda_1} + \frac{a_2}{X-\lambda_2} + \dots + \frac{a_i}{X-\lambda_i}$$

C'est la **décomposition en éléments simples.**

Une manière simple de calculer les $a_i$ est de multiplier les deux membres de la fraction par (X – $\lambda_i$ ) puis de dire X = $\lambda_i$ ce qui donne par exemple $a_i$ .

Exemple : Décomposez en éléments simples la fraction suivante : $F(x) = \dfrac{2(x^2-x+1)}{x^3-2x^2-x+2}$

Pôles simples : 1 ; – 1 et 2 on écrit B(x) = (x – 1).(x+1).(x-2)

Donc DES

$$F(x) = \frac{2(x^2-x+1)}{(x-1).(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

Pour trouver a, on multiplie par ( x – 1)

F ( x ) . ( x - 1) $= \dfrac{2(x^2-x+1).(x-1)}{(x-1).(x+1).(x-2)} = \dfrac{a.(x-1)}{x-1} + \dfrac{b.(x-1)}{x+1} + \dfrac{c.(x-1)}{x-2}$

On simplifie et on remplace x par 1 qui est la racine de x – 1 $= \dfrac{2(x^2-x+1)}{(x+1).(x-2)} = \dfrac{2((1)^2-1+1)}{(1+1).(1-2)} = \dfrac{2}{-2} = -1 =$ a

Pour trouver b, on multiplie par ( x + 1)

F ( x ) . ( x + 1) $= \dfrac{2(x^2-x+1).(x+1)}{(x-1).(x+1).(x-2)} = \dfrac{a.(x+1)}{x-1} + \dfrac{b.(x+1)}{x+1} + \dfrac{c.(x+1)}{x-2}$

On simplifie et on remplace x par -1 qui est la racine de x + 1 $= \dfrac{2(x^2-x+1)}{(x-1).(x-2)} = \dfrac{2((-1)^2+1+1)}{(-1-1).(-1-2)} = \dfrac{6}{6} = 1 =$ b

Pour trouver c, on multiplie par ( x - 2)

F ( x ) . ( x– 2) $= \dfrac{2(x^2-x+1).(x-2)}{(x-1).(x+1).(x-2)} = \dfrac{a.(x-2)}{x-1} + \dfrac{b.(x-2)}{x+1} + \dfrac{c.(x-2)}{x-2}$

On simplifie et on remplace x par 2 qui est la racine de x– 2 $= \dfrac{2(x^2-x+1)}{(x+1).(x-1)} = \dfrac{2((2)^2-2+1)}{(2+1).(2-1)} = \dfrac{6}{3} = 2 =$ c

$$F(X) = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}$$

## 3.2. Pôles réels d'ordre 2 ou plus (pôles doubles ou multiples)

Soit F ( X ) = $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{R}$ ( X ), avec deg ( A ) < deg ( B) et B(X) comportant des éléments de la forme $(X-\lambda)^n$ racines réelles multiples, alors F ( X ) se **décompose de façon unique** dans $\mathbb{R}$ **( X ) :**

F ( X ) = $\boxed{\dfrac{A(X)}{B(X)}=\dfrac{A(X)}{(X-\lambda)^n}=\dfrac{a_1}{X-\lambda}+\dfrac{a_2}{(X-\lambda)^2}+\ldots+\dfrac{a_n}{(X-\lambda)^n}}$ avec $a_i$ , $\lambda \in \mathbb{R}$ et n $\in \mathbb{N}^*$

On calcule d'abord $a_n$ en multipliant les deux membres de la fraction par $(X-\lambda)^n$ puis de dire X = λ ce qui donne $a_n$
Pour les autres termes, on multiplie la fraction par X puis on fait tendre X vers plus l'infini.

Exemple : Décomposez en éléments simples la fraction suivante : $F(x)=\dfrac{3x^3-9x^2-3x}{x^4-2x^3-3x^2+4x+4}$

Pôles doubles : – 1 et 2 on écrit B(x) $=(x+1)^2.(x-2)^2$
Donc DES

$$F(X)=\frac{3x^3-9x^2-3x}{(x+1)^2.(x-2)^2}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{x-2}+\frac{d}{(x-2)^2}$$

Pour trouver b, on multiplie par $(x+1)^2$

F ( x ) . $(x+1)^2$ $=\dfrac{(3x^3-9x^2-3x).(x+1)^2}{(x+1)^2.(x-2)^2}=\dfrac{a.(x+1)^2}{x+1}+\dfrac{b.(x+1)^2}{(x+1)^2}+\dfrac{c.(x+1)^2}{x-2}+\dfrac{d.(x+1)^2}{(x-2)^2}$

On simplifie et on remplace x par - 1 qui est la racine de x + 1

$$=\frac{3x^3-9x^2-3x}{(x-2)^2}=\frac{3(-1)^3-9(-1)^2-3(-1)}{(-1-2)^2}=\frac{-9}{9}=-1 = b$$

De même pour d, on multiplie par $(x-2)^2$

F ( x ) . $(x-2)^2$ $=\dfrac{(3x^3-9x^2-3x).(x-2)^2}{(x+1)^2.(x-2)^2}=\dfrac{a.(x-2)^2}{x+1}+\dfrac{b.(x-2)^2}{(x+1)^2}+\dfrac{c.(x-2)^2}{x-2}+\dfrac{d.(x-2)^2}{(x-2)^2}$

On simplifie et on remplace x par 2 qui est la racine de x – 2

$$=\frac{3x^3-9x^2-3x}{(x+1)^2}=\frac{3(2)^3-9(2)^2-3(2)}{(2+1)^2}=\frac{-18}{9}=-2 = d$$

Pour trouve a et c, on multiplie F(x) par x

F ( x ) . x $=\dfrac{(3x^3-9x^2-3x).x}{(x+1)^2.(x-2)^2}=\dfrac{ax}{x+1}+\dfrac{bx}{(x+1)^2}+\dfrac{cx}{x-2}+\dfrac{dx}{(x-2)^2}$

et on fait tendre x vers + ∞ ce qui est équivalent à

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^3-9x^2-3x).x}{(x+1)^2.(x-2)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4}{x^4}=3 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{x}+\frac{bx}{x^2}+\frac{cx}{x}+\frac{dx}{x^2}=a+c$$ Donc a+c = 3

Il nous manque une équation pour connaître a et c ; on choisit une valeur particulière simple qui n'est pas un pôle de F pour calculer F

F(0)= 0 = $\dfrac{a}{1}+\dfrac{-1}{1^2}+\dfrac{c}{-2}+\dfrac{-2}{(-2)^2}=a-1-\dfrac{c}{2}-\dfrac{1}{2}=0$

a-c/2=3/2 ce qui est équivalent à 2a-c=3 d'où a = 2 c donc c = 1 et a = 2

$$F(X)=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}$$

### 3.3. Pôles complexes d'ordre 1 (racines complexes)

Soit F ( X ) = $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{R}$ ( X ), avec deg ( A ) < deg ( B) et B(X) comportant des éléments de la forme ($X^2 + \lambda X + \mu$) avec un discriminant négatif (racines complexes), alors F ( X ) se **décompose de façon unique** dans $\mathbb{R}$ **( X ) :**

$$F(X) = \boxed{\frac{A(X)}{B(X)} = \frac{A(X)}{\left(X^2+\lambda_1 X+\mu_1\right)\ldots\left(X^2+\lambda_k X+\mu_k\right)} = \frac{a_1 X+b_1}{\left(X^2+\lambda_1 X+\mu_1\right)}+\ldots+\frac{a_k X+b_k}{\left(X^2+\lambda_k X+\mu_k\right)}}$$

avec $a_k, b_k, \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}$

Pour calculer les coefficients, on utilise en général, la méthode d'identification.

Cas particulier : racines complexes très simples ex : $x^2 + 1$ admet 2 racines i et (-i). On utilise la même méthode qu'avec les racines réelles.

Exemple 1: Décomposez en éléments simples la fraction suivante : $F(x) = \dfrac{2x+1}{x^3-2x^2+x-2}$

Pôles complexes : i et (- i) on écrit $B(x) = (x^2+1).(x-2)$
Donc DES

$$F(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1).(x-2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

Pour trouver a, on multiplie par ( x – 2) F(x).(x - 2) $= \dfrac{(2x+1).(x-2)}{(x^2+1).(x-2)} = \dfrac{a.(x-2)}{(x-2)} + \dfrac{(bx+c).(x-2)}{(x^2+1)}$

On simplifie et on remplace x par 2 qui est la racine de x – 2 $\dfrac{(2.2+1)}{(2^2+1)} = \dfrac{5}{5} = 1$ = a

Pour trouver b et c, on multiplie par ( $x^2+1$) F(x).( $x^2+1$) $= \dfrac{(2x+1).(x^2+1)}{(x^2+1).(x-2)} = \dfrac{1.(x^2+1)}{(x-2)} + \dfrac{(bx+c).(x^2+1)}{(x^2+1)}$

On simplifie et on remplace x par i qui est la racine de $x^2+1$

$\dfrac{(2i+1)}{(i-2)} = \dfrac{(2i+1).(i+2)}{(i-2).(i+2)} = \dfrac{-2+5i+2}{-5} = -i$ = bi+c $\Rightarrow$b = -1 et c = 0

Donc $F(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+1).(x-2)} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x}{x^2+1}$

Exemple 2: Décomposez en éléments simples la fraction suivante : $F(x) = \dfrac{-x^2+x}{x^4+x^3+2x^2+x+1}$

Pôles complexes : i et (- i) on écrit $B(x) = (x^2+1).(x^2+x+1)$
Donc DES

$$F(x) = \frac{-x^2+x}{(x^2+1).(x^2+x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}$$

Pour trouver a et b, on multiplie par ( $x^2+1$)

F(x).($x^2+1$) $= \dfrac{(-x^2+x).(x^2+1)}{(x^2+1).(x^2+x+1)} = \dfrac{(ax+b).(x^2+1)}{(x^2+1)} + \dfrac{(cx+d).(x^2+1)}{(x^2+x+1)}$

On simplifie et on remplace x par i qui est la racine de $x^2+1$

$\dfrac{(-(i)^2+i)}{(i^2+i+1)} = \dfrac{(-i+1).i}{(-1+i+1)} = \dfrac{(-i+1).i}{i} = -i+1$ = ai+b $\Rightarrow$a = -1 et b = 1

Pour trouve c et d, il existe 2 méthodes :

1°) méthode

On multiplie F(x) par x F(x ).x $= \dfrac{(-x^2+x)x}{(x^2+1).(x^2+x+1)} = \dfrac{(-x+1)x}{x^2+1} + \dfrac{(cx+d)x}{x^2+x+1}$

et on fait tendre x vers + ∞ ce qui équivaut à :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(-x^2+x).x}{(x^2+1).(x^2+x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{x^4} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(-x+1).x}{(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(cx+d).x}{(x^2+x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{cx^2}{x^2} = c$$

quand x tend vers l'infini 0 = – 1 + c donc c = 1

Il nous manque une équation pour connaître d; on choisit une valeur particulière simple qui n'est pas un pôle de F pour calculer F

ici x=0 F(0) = 0 = $0 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{d}{1}$ d'où d = – 1

$$F(x) = \frac{-x^2+x}{(x^2+1).(x^2+x+1)} = \frac{-x+1}{x^2+1} + \frac{x-1}{x^2+x+1}$$

2°) méthode

On identifie en mettant au même dénominateur :

$$F(x) = \frac{-x^2+x}{(x^2+1).(x^2+x+1)} = \frac{(-x+1).(x^2+x+1)+(cx+d).(x^2+1)}{(x^2+1).(x^2+x+1)}$$

$$F(x) = \frac{(-1+c)x^3+(-1+1+d)x^2+(-1+1+c)x+1+d}{(x^2+1).(x^2+x+1)}$$

On résout le système :

$$\begin{cases} -1+c=0 \\ d=-1 \\ c=1 \\ 1+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=1 \\ d=-1 \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{-x^2+x}{(x^2+1).(x^2+x+1)} = \frac{-x+1}{x^2+1} + \frac{x-1}{x^2+x+1}$$

## 3.4. Pôles complexes d'ordre 2 ou plus (racines complexes multiples)

Soit F ( X ) = $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ une fraction rationnelle de ℝ ( X ), avec deg ( A ) < deg ( B) et B(X) comportant des éléments de la forme $(X^2 + \lambda X + \mu)^n$ avec un discriminant négatif (racines complexes), alors F ( X ) se **décompose de façon unique** dans ℝ **( X ) :**

$$F(X) = \boxed{\frac{A(X)}{B(X)} = \frac{A(X)}{\left(X^2+\lambda X+\mu\right)^n} = \frac{a_1X+b_1}{\left(X^2+\lambda X+\mu\right)} + \frac{a_2X+b_2}{\left(X^2+\lambda X+\mu\right)^2} + \dots + \frac{a_nX+b_n}{\left(X^2+\lambda X+\mu\right)^n}}$$

avec $a_n, b_n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Pour calculer les coefficients, on utilise la méthode d'identification.

Exemple : Décomposez en éléments simples la fraction suivante : $F(x)=\dfrac{2x^3+2x-1}{x^4+2x^2+1}$

$$\boxed{F(x)=\frac{2x^3+2x-1}{x^4+2x^2+1}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{cx+d}{(x^2+1)^2}}$$

1°) méthode

Pour trouver c et d, on multiplie par ( x ²+1)²

$$\boxed{F(x).(x^2+1)^2=\frac{(2x^3+2x-1).(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}=\frac{(ax+b).(x^2+1)^2}{x^2+1}+\frac{(cx+d).(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}}$$

puis on simplifie et on remplace x par i qui est la racine de x²+1

$2i^3+2i-1 = -2i+2i-1 = ci+d$ d'où c = 0 et d = – 1

Pour trouver a et b, on multiplie F(x) par x et on fait tendre x vers + $\infty$

F(x).(x) $\boxed{=\dfrac{(2x^3+2x-1)x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{(ax+b)x}{x^2+1}-\dfrac{1.x}{(x^2+1)^2}}$

et on fait tendre x vers + $\infty$ ce qui équivaut à :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^3+2x-1).x}{(x^2+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{x^4}=2 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{(ax+b).x}{(x^2+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{x^2}=a$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x.x}{(x^2+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-cx^2}{x^4}=0$$

quand x tend vers l'infini 2 = a + 0 donc a = 2

Il nous manque une équation pour connaître b; on choisit une valeur particulière simple pour calculer F

ici x=0 F(0) = $\dfrac{-1}{1}=\dfrac{b}{1}-\dfrac{1}{1}$ d'où b = 0

$$F(x)=\frac{2x^3+2x-1}{x^4+2x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

2°) méthode

On identifie en mettant au même dénominateur :

$$F(x)=\frac{2x^3+2x-1}{(x^2+1)^2}=\frac{(ax+b).(x^2+1)+cx+d}{(x^2+1)^2}=\frac{ax^3+bx^2+(a+c)x+b+d}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{cases}a=2\\b=0\\a+c=2\\b+d=-1\end{cases}\qquad\begin{cases}a=2\\b=0\\c=0\\d=-1\end{cases}$$

$$F(x)=\frac{2x^3+2x-1}{x^4+2x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

## 3.5. Décomposition d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}$ (X)

Généralisation : Une fraction rationnelle peut comporter des pôles réels et des pôles complexes, simples ou multiples.

## Théorème de décomposition unique dans $\mathbb{R}$ ( X ) :

Soit F ( X ) = $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{R}$ ( X ),

avec deg ( A ) < deg ( B), alors F ( X ) se **décompose de façon unique** dans **R ( X )** comme somme d'éléments du type :

$\boxed{\dfrac{a}{(X-\lambda)^n}}$ avec $\lambda$,a $\in \mathbb{R}$ et n $\in \mathbb{N}^*$ **(éléments simples de première espèce)**

ou $\boxed{\dfrac{aX+b}{(X^2+\alpha X+\beta)^n}}$ avec $\lambda$, $\alpha$, $\beta$, a et b $\in \mathbb{R}$ et n $\in \mathbb{N}^*$ **(éléments simples de deuxième espèce)**

dont les dénominateurs divisent B ( X ).

Exemple 1 : Donner sur son ensemble de définition une primitive de la fraction rationnelle :

F( X ) = $\dfrac{2X^2+X+1}{X^3+X^2+X+1}$

Cherchons les pôles de F ( X ) dans $\mathbb{C}$ : $-1$ est une valeur évidente

$$
\begin{array}{r|l}
X^3 + X^2 + X + 1 & X+1 \\
\cline{2-2}
-\ X^3 + X^2 \qquad\qquad & X^2+1 \\
\cline{1-1}
0 \qquad X+1 & \\
-\ X+1 & \\
\cline{1-1}
0 & 
\end{array}
$$

B ( X ) = ( X + 1 ).( X $^2$ + 1 ) = ( X + 1 ).( X + i ).( X – i )

On décompose F ( X ) en éléments simples dans $\mathbb{R}$ ( X ) : $F(X)=\dfrac{2X^2+X+1}{(X+1).(X^2+1)}=\dfrac{a}{X+1}+\dfrac{bX+c}{X^2+1}$

On cherche d'abord a : $\dfrac{2(-1)^2-1+1}{((-1)^2+1)}=a$ a=1

1°) méthode

Pour trouver c et d, on multiplie par ( x ²+1)

$$\boxed{F(X).(X^2+1)=\frac{(2X^2+X+1).(X^2+1)}{(X+1).(X^2+1)}=\frac{1.(X^2+1)}{X+1}+\frac{(bX+c).(X^2+1)}{(X^2+1)}}$$

puis on simplifie et on remplace x par i qui est la racine de x²+1

$\boxed{\frac{(2i^2+i+1)}{(i+1)}=\frac{(i-1).(i-1)}{(i+1).(i-1)}=\frac{-2i}{-2}=i}$ = bi+c d'où b = 1 et c = 0

2°) méthode

Puis on identifie pour trouver b et c : $F(X)=\frac{1.(X^2+1)+(bX+c).(X+1)}{(X+1).(X^2+1)}=\frac{(1+b).X^2+(b+c).X+1+c}{(X+1).(X^2+1)}$

$$\begin{cases}1+b=2\\b+c=1\\1+c=1\end{cases}\quad\begin{cases}1+b=2\\b=1\\c=0\end{cases}$$

$$F(X)=\frac{X}{X^2+1}+\frac{1}{X+1}$$

Intégration …

Exemple 2 : Décomposer dans $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle suivante

F ( X ) = $-\frac{X^2+7X+9}{(X+1)^2.(X-2)}\boxed{=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{c}{X-2}}$

Pour trouver c, on multiplie par ( X - 2 ) et on remplace X par 2 qui est la racine de X - 2

F(X).(X – 2) = $-\frac{4+7.2+9}{9}=-3$ = c

Pour trouver b, on multiplie par ( X + 1 ) $^2$ et on remplace X par -1 qui est la racine de X + 1

F(X).(X + 1)² = $-\frac{1-7+9}{-3}=1$ = b

Pour trouver a, on multiplie par X et on fait tendre X vers + $\infty$

F(X).$X_\infty$ = - 1 = a + c d'où a = 2

$$F(X)=\frac{2}{X+1}+\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{3}{X-2}$$

## 4. Méthode complète de décomposition

Soit F ( X ) = $\frac{A(X)}{B(X)}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{C}$ ( X ) ou $\mathbb{R}$( X ).

### 4.1. Forme irréductible

Chercher si la fraction est irréductible :

- o Calculer les pôles de F ( c'est-à-dire les racines de B)
- o Vérifier si les pôles de F sont des racines de A

### 4.2. Division euclidienne de A par B si deg (A) $\geq$ deg (B)

Si le degré du polynôme A est supérieur au degré du polynôme B, alors on effectue la division euclidienne de A par B :

A ( X ) = Q ( X ) . B ( X ) + R ( X )

Donc F ( X ) = Q ( X ) + $\frac{R(X)}{B(X)}$ avec deg ( B ) > deg ( R ) ou R ( X ) = 0

Ensuite, on décompose la fraction rationnelle $\frac{R(X)}{B(X)}$ en éléments simples (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ ).

<u>Exemple 1</u> : Décomposer dans $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle suivante

F ( X ) = $\frac{X^3+X^2-X-3}{(X^2-1)}$

Forme irréductible : calculons les pôles de F(X) pôles simples 1 et -1

A(1) $\neq$ 0 et A(-1) $\neq$ 0 donc la fraction est irréductible.

deg (A) > deg (B) : on divise A par B et on trouve A(X) = B(X).Q(X) + R(X) avec Q(X) = X+1 et R(X) = - 2

$$F(X)=\frac{X^3+X^2-X-3}{(X-1).(X+1)}=X+1+\frac{-2}{(X-1).(X+1)}=X+1+F_1(X)$$

DES de la fraction $F_1(X)$

$$F_1(X)=\frac{-2}{(X-1).(X+1)}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}$$

Pour trouver a, on multiplie par (X - 1) et on remplace X par 1 qui est la racine de X - 1

$F_{1(}(X).(X-1)$ = $\frac{-2}{2}=-1$ = a

Pour trouver b, on multiplie par (X + 1 ) et on remplace X par -1 qui est la racine de X + 1

$F_1(X).(X+1)$ = $\frac{-2}{-2}=1$ = b

Donc $F_1(X)=\frac{-2}{(X-1).(X+1)}=\frac{-1}{X-1}+\frac{1}{X+1}$

Et $F(X)=X+1-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}$

<u>Exemple</u> 2: F ( X ) = $\frac{X^3+4X^2+X+2}{(X+1)^3.(X-1)}$

X = -1 Pôle d'ordre 3 et 1 pôle simple

$$F(X)=\frac{X^3+4X^2+X+2}{(X-1).(X+1)^3}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{(X+1)^2}+\frac{d}{(X+1)^3}$$

On calcule d'abord a : F( X).(X – 1) = $\frac{8}{8}=1$ = a

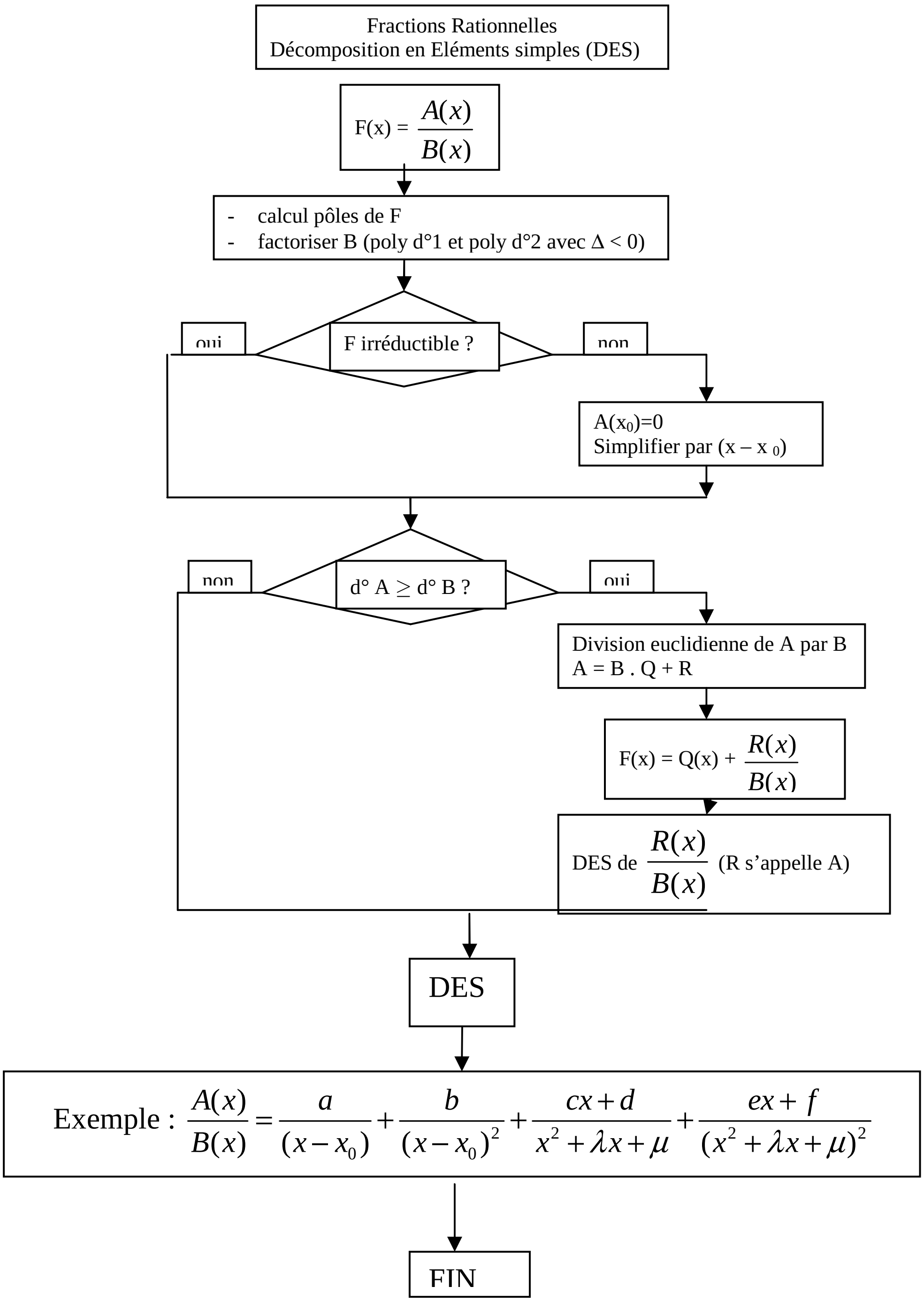
Puis on identifie : $F(X)=\frac{X^3+4X^2+X+2}{(X-1).(X+1)^3}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{(X+1)^2}+\frac{d}{(X+1)^3}$

$$F(X)=\frac{(X+1)^3+b(X-1).(X+1)^2+c(X-1).(X+1)+d(X-1)}{(X-1).(X+1)^3}$$

$$F(X)=\frac{(1+b)X^3+(3+b+c)X^2+(3-b+d)X+1-b-c-d}{(X-1).(X+1)^3}$$

$$\begin{cases}1+b=1\\3+b+c=4\\3-b+d=1\\1-b-c-d=2\end{cases}\qquad\begin{cases}b=0\\c=1\\d=-2\\c+d=-1\end{cases}\qquad F(X)=-\frac{2}{(X+1)^3}+\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{1}{X-1}$$

5. Récapitulatif


Fractions Rationnelles
Décomposition en Eléments simples (DES)
F(x) = $\frac{A(x)}{B(x)}$
- calcul pôles de F
- factoriser B (poly d°1 et poly d°2 avec $\Delta < 0$)
oui
F irréductible ?
non
$A(x_0)=0$
Simplifier par $(x - x_0)$
non
d° A $\geq$ d° B ?
oui
Division euclidienne de A par B
A = B . Q + R
F(x) = Q(x) + $\frac{R(x)}{B(x)}$
DES de $\frac{R(x)}{B(x)}$ (R s'appelle A)
DES
Exemple : $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a}{(x-x_0)} + \frac{b}{(x-x_0)^2} + \frac{cx+d}{x^2+\lambda x+\mu} + \frac{ex+f}{(x^2+\lambda x+\mu)^2}$
FIN