Convergence et limite de suites numériques

1. Convergence d'une suite

1.1. Définition

Une suite de nombres réels est **convergente** et admet comme limite un nombre réel ℓ si, quelque soit le nombre $\varepsilon > 0$ aussi petit soit-il, il existe un entier N tel que, pour les rangs n > N, on ait $| u_n - \ell | < \varepsilon$.

La suite (u_n) converge vers ℓ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Une suite qui ne converge pas est appelée suite **divergente** : c'est une suite qui n'a pas de limite ou une suite dont la limite est égale à l'infini $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$

⚠ Ne pas confondre convergence et monotonie d'une suite.
Une suite peut être convergente et non monotone (ni croissante, ni décroissante)

[vidéo cours suites convergentes]

1.2. Exemples

a) suites convergentes

Les suites $\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n^2}\right), \left(\frac{1}{n^3}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 0$, $\frac{1}{a^n}$ avec a > 1 sont décroissantes et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

$\forall a > 0 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

b) suites divergentes

Les suites (n) , (n^2), (n^3), ($\sqrt{n}$), (n^α) avec $\alpha > 0$, a^n avec a > 1, (ln n) et (e^n) sont croissantes et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
La suite $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

c) suites convergentes ou divergentes

$\forall a > 0$ la suite $u_n = a^n$ converge vers 0 si $| a | < 1$ et diverge si $| a | > 1$

2. Détermination de la limite

2.1. Théorème du point fixe

Soit f une fonction continue, stable sur un intervalle I ($f(I) \subset I$) et (u_n) une suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$,
si (u_n) converge vers ℓ alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ et ℓ est un point fixe de f.

<u>Exemple</u> : Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2} \end{cases}$ cette suite est décroissante et minorée.

Montrons que sur l'intervalle [0, 1], elle converge vers une valeur ℓ que l'on précisera ?

La suite converge donc vers $\ell \in \mathbb{R}$

Soit f : [0, 1] → [0, 1] telle que f (x) = x / 2

ℓ vérifie f (ℓ) = ℓ donc $\ell = \ell / 2$ d'où $\ell = 0$

3. Opérations sur les suites convergentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers ℓ et ℓ' et soit un réel λ

- La suite ($u_n + v_n$), somme des suites (u_n) et (v_n) converge vers $\ell + \ell'$

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell' \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'}$$

- La suite (λu_n), produit de la suite (u_n) par le réel λ converge vers $\lambda \ell$

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}\text{, alors } \lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda \ell}$$

- La suite ($u_n \times v_n$), produit des suites (u_n) et (v_n) converge vers $l \times l'$

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell' \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n . v_n = \ell\ell'}$$

- Si tous les termes de la suite (v_n) ne sont pas nuls ainsi que sa limite ℓ', alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ quotient des deux

suites (u_n) et (v_n) converge vers $\boxed{\frac{l}{l'}}$

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = l \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = l' \text{ avec } l' \neq 0 \text{, alors } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \boxed{\frac{l}{l'}}}$$

- La suite $|u_n|$, valeur absolue de la suite (u_n) converge vers $| \ell |$

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} | u_n | = | \ell |}$$

La réciproque est fausse.

<u>Exemple</u> :

$u_n = (- 1)^n$ cette suite est divergente mais $\lim | u_n | = 1$

4. Propriétés des suites convergentes

4.1. Si une suite est convergente, sa limite est unique.

4.2. Toute suite convergente est bornée.

<u>Remarque</u> : Il existe des suites bornées non convergentes $u_n = (- 1)^n$

4.3. Toute suite **croissante** **majorée** est convergente

4.4. Toute suite **décroissante** **minorée** est convergente

5. Suites extraites

5.1. Définition

Soit une suite (u_n), on appelle **suite extraite** de (u_n) toute suite (v_n) avec $v_n = u_{\phi(n)}$
où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Une suite extraite de la suite (u_n) est construite en énumérant les termes de (u_n) sauf certains qu'on laisse de côté; ainsi on ne garde qu'une partie de l'information.

5.2. Exemples

a) soit la suite (u_n), (u_{2n}) est une suite formée par les termes de rang pair et (u_{2n+1}) est une suite formée par les termes de rang impair.

b) (u_{2n}) et (u_{n^2}) sont deux suites extraites de (u_n). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = u_{n^2}$ est la suite $\boxed{\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}_{n \in \mathbb{N}^*}$

c) (u_{n^2-n}) n'est pas une suite extraite car l'application n'est pas strictement croissante. $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 0$

5.3. Propriétés

Si une suite (u_n) admet une limite (finie ou infinie) alors toute suite extraite $(u_{\phi(n)})$ admet la même limite.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ alors toute suite extraite de (u_n), converge vers ℓ

<u>Remarque</u> : La réciproque est en général fausse. Exemple : $u_n = (-1)^n$
(u_{2n}) est la suite constante égale à 1 et donc elle converge vers 1 ; (u_{2n+1}) est la suite constate égale à -1 et donc elle converge vers -1 alors que la suite (u_n) ne converge pas.

Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite, alors toute la suite (u_n) admet aussi cette limite commune.

On peut donc ramener l'étude de convergence d'une suite à celle des suites de rangs pair et impair qui peuvent s'avérer plus simples.

6. Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que il existe un entier N, tel que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$
Si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors (v_n) diverge vers $+\infty$
Si (v_n) diverge vers $-\infty$ alors (u_n) diverge vers $-\infty$

7. Théorème des gendarmes (ou d'encadrement)

7.1. Définition

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que : $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang ($\forall n \geq N$)
(u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ alors (v_n) converge vers ℓ.

7.2. Exemples

Montrons que les suites sont convergentes et donnons leur limite :

$$v_n = \frac{\sin n}{n}$$

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n}$$ (suites alternées)

8. Suite complexe

8.1. Définition

Une suite complexe (u_n), converge vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si (Re (u_n)), suite réelle, converge vers Re (l) $\in \mathbb{R}$ et (Im (u_n)), suite réelle, converge vers Im (l) $\in \mathbb{R}$.

8.2. Exemple

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{C} \ \text{(fixé)} \\ u_n = \frac{1}{5}(3\, u_{n-1} + 2\, \overline{u_{n-1}}) \end{cases}$

Montrons que $\lim_{n \to +\infty} u_n =$ Re (a) ?

Alors (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{C} \quad (\text{ fixé}) \\ u_n = \dfrac{1}{5}(5\ \mathrm{Re}(u_{n-1}) + i.\mathrm{Im}(u_{n-1})) = \mathrm{Re}(u_{n-1}) + 1/5.i.\mathrm{Im}(u_{n-1}) \end{cases}$

Donc u_0 = a et u_1 = Re (a) + i / 5. Im (a)

u_2 = Re (a) + i / 5 ². Im (a) etc… et par récurrence u_n = Re (a) + i / 5^n. Im (a)
Il est maintenant évident que | u_n - Re (a) | = | i / 5^n. Im (a) | qui tend vers 0 lorsque n tend vers + ∞
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ Re (a)